Belarussian state university. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus.
Proceeding of AMADE-2006, ISBN 985-6499-35-6. Minsk. 2006. Vol. 1. P.48—52.

УДК 517.968

ОБ ОБРАТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. А. Карелин, Gilberto Perez Lechuga

In [1]we considered singular integral operators with orientation-reversing shift on the space L_2 over the real line and piecewise coefficients having at most four different values; conditions of the invertibility of the operators were found. In this article we consider singular integral operators with orientation-preserving shift on the space L_2 over the unit circle and coefficients of a special structure having automorphic properties; conditions of the invertibility of the operators are obtained.

1. Обратимость сингулярных интегральных операторов, порожденных сохраняющим ориентацию сдвигом

Через $[H_1, H_2]$ обозначим множество ограниченных линейных операторов действующих из банахова пространства H_1 в банахово пространство H_2, $[H_1] \equiv [H_1, H_1]$. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}$ два контура, причем $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$. Расширение функии $f(t)$, $t \in \mathcal{L}$ нолем до функции, заданной на $\mathcal{T} \setminus \mathcal{L}$ обозначим через $\left(J_{\mathcal{T}\setminus\mathcal{L}} f\right)(t), t \in \mathcal{T}$. Сужение функции $\varphi(t)$, $t \in \mathcal{T}$ на $\mathcal{L}$ обозначим через $(C_{\mathcal{L}}\varphi)(t)$, $t \in \mathcal{L}$. Сингулярный интегральный оператор Коши по контуру Γ через

$$(S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

тождественный оператор по контуру Γ через $(I_\Gamma\varphi)(t) = \varphi(t)$. Характеристическую функцию контура γ заданную на Γ через $\chi_\gamma(t),\ t \in \Gamma$.
Введем обозначение для единичной окружности - T, верхней полуокружности - T_+ и верхней полуокружности - T_-.

Пусть $a_{2,ij}$ и $b_{2,ij},\ i = 1, 2 j = 1, 2$ - кусочнопостоянные функции, заданные на T_+, принимающие самое большее три значения и имеющие возможные разрывы только быть может в точках $t = t_0,\ t = t_1,\ 0 < arg t_0 < arg t_1 < \pi$.

В пространстве $L_2(T)$ рассмотрим оператор

$$A_T = a_T I_T + c_T S_T + b_T W_T + d_T S_T W_T, \quad A \in [L_2(T)], \tag{1.1}$$

с коэффициентами специального вида, построенными по функциям $a_{2,ij},\ b_{2,ij}$ и функциям $t,\ t^{-1}$, обладающими некоторыми автоморфными свойствами

$$C_{T_+} a_T = \frac{1}{2}[a_{2,11} + a_{2,22} + t a_{2,21} + t^{-1} a_{2,12}], \quad C_{T_+}(W a_T) = \frac{1}{2}[a_{2,11} + a_{2,22} - t a_{2,21} - t^{-1} a_{2,12}],$$

Keywords: *singular integral operators, orientation-preserving shift, inverse operator.*
2000 Mathematical Subject Classification: 47G10, 45E99, 45F15

$$C_{T_+}b_T = \frac{1}{2}[a_{2,11} - a_{2,22} + ta_{2,21} - t^{-1}a_{2,12}], \quad C_{T_+}(Wb_T) = \frac{1}{2}[a_{2,11} - a_{2,22} - ta_{2,21} + t^{-1}a_{2,12}],$$

$$C_{T_+}c_T = \frac{1}{2}[b_{2,11} + b_{2,22} + tb_{2,21} + t^{-1}b_{2,12}], \quad C_{T_+}(Wc_T) = \frac{1}{2}[b_{2,11} + b_{2,22} - tb_{2,21} - t^{-1}b_{2,12}],$$

$$C_{T_+}d_T = \frac{1}{2}[b_{2,11} - b_{2,22} + tb_{2,21} - t^{-1}b_{2,12}], \quad C_{T_+}(Wd_T) = \frac{1}{2}[b_{2,11} - b_{2,22} - tb_{2,21} + t^{-1}b_{2,12}], \quad (1.2)$$

Применим операторное тождество [2] к оператору A_T. В результоте (1.1) преобразуется в матричный характеристическнй сингулярный интегральный оператор

$$F^{-1}A_TF = D_T, \quad D_T = u_TI_T + v_TS_T \in [L_2^2(T)] \quad (1.3)$$

Опишем рператоры, осуществляющие преобразование подобия в (1.3)

Оператор $F \in [L_2^2(T_+), L_2(T)]$ задается композицией операторов

$$F = M_{T_+}ZGN_{T_+}$$

где

$$M_{T_+}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = J_{T_-}\varphi_1 + W_T^{-1}J_{T_-}\varphi_2, \quad M_{T_+} \in [L_2^2(_{T_+}), L_2(T)],$$

$$M_{T_+}^{-1}\varphi = \begin{pmatrix} C_{T_+}\varphi \\ C_{T_+}W_T\varphi \end{pmatrix}, \quad M_{T_+}^{-1} \in [L_2(T), L_2^2(T_+)],$$

$$Z^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G_{T_+}^{\pm 1}(t) = \operatorname{diag}(1, t^{\pm 1}), \quad t \in T_+.$$

$$(N_{T_+}\zeta)(t) = \zeta(t^2), \quad (N_{T_+}^{-1}\zeta)(t) = \zeta(t^{\frac{1}{2}}),$$

$$N_{T_+} \in [L_2^2(T), L_2^2(T_+)], \quad N^{-1} \in [L_2^2(T_+), L_2^2(T)].$$

Проследим как преобразуются коэффициены (1.2) на каждом шаге

$$M^{-1}A_TM = u_1I_{T_+} + v_1\left[S_{T_+} + V^{-1}U_{T_+}\right] =: A_1, \quad A_1 \in [L_2^2(T_+)],$$

где

$$V = V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V^0 = V^2 = E_2 = \operatorname{diag}(1,1), \ V^2 = V(V),$$

$$U_{T_+} := C_{T_+}WS_TJ_{T_-} \quad (U_{T_+}f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{T_+}\frac{f(\tau)}{\tau + t}\,d\tau, \quad t \in T_+, \quad U_{T_+} \in [L_2(T_+)], \quad (1.4)$$

$$u_1 = C_{T_+}\begin{pmatrix} a_T(t) & b_T(t) \\ b_T(-t) & a_T(-t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{2,11} + a_{2,22} + ta_{2,21} + t^{-1}a_{2,12} & a_{2,11} - a_{2,22} + ta_{2,21} - t^{-1}a_{2,12} \\ a_{2,11} - a_{2,22} - ta_{2,21} + t^{-1}a_{2,12} & a_{2,11} + a_{2,22} - ta_{2,21} - t^{-1}a_{2,12} \end{pmatrix},$$

$$v_1 = C_{T_+}\begin{pmatrix} c_T(t) & d_T(t) \\ d_T(-t) & c_T(-t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{2,11} + b_{2,22} + tb_{2,21} + t^{-1}b_{2,12} & b_{2,11} - b_{2,22} + tb_{2,21} - t^{-1}b_{2,12} \\ b_{2,11} - b_{2,22} - tb_{2,21} + t^{-1}b_{2,12} & b_{2,11} + b_{2,22} - tb_{2,21} - t^{-1}b_{2,12} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что размерность пространства увеличивается вдвое, сингулярный интегральный оператор Коши по контуру T переходит в сингулярный интегральный оператор Коши по контуру T и оператор с локальными особенностями на концах (1.4), а оператор сдвига W_T образует оператор умножения на подстановочную матрицу V

$$M^{-1}W_TM = VI_{\mathcal{L}}, \quad M^{-1}S_TM = S_{T_+} + V^{-1}U_{T_+}$$

На втором шаге мы применяем справа и слева оператор Z и получаем

$$Z^{-1}A_1ZI_{T_+} = u_2I_{T_+} + v_2\left[S_{T_+} + \Omega^{-1}U_{T_+}\right] =: A_2, \quad A_2 \in [L_2^m(T_+)], \quad (1.5)$$

где матрица

$$\Omega = \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а коэффициенты

$$u_2 = Z^{-1}u_1 Z = \begin{pmatrix} a_{2,11} & t^{-1}a_{2,12} \\ ta_{2,21} & a_{2,22} \end{pmatrix}, \quad v_2 = Z^{-1}v_1 Z = \begin{pmatrix} b_{2,11} & t^{-1}b_{2,12} \\ tb_{2,21} & b_{2,22} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что подстановочная матрица V переходит в диагональную Ω, а также

$$S_{T_+} + \Omega^{-1}U_{T_+} = \begin{pmatrix} S_{T_+} & 0 \\ 0 & S_{T_+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{T_+} & 0 \\ 0 & U_{T_+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{T_+} + U_{T_+} & 0 \\ 0 & S_{T_+} - U_{T_+} \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau + t} = \frac{t}{\tau}\left[\frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau + t}\right], \quad t^{-1}\left[S_{T_+} - U_{T_+}\right] tI_{T_+} = \left[S_{T_+} + U_{T_+}\right],$$

$$\left(\left[S_{T_+} + U_{T_+}\right]\eta\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{T_+} \frac{2\tau}{\tau^2 - t^2}(\tau)\eta(\tau)d\tau,$$

Таким образом оператор A_2 из (1.5) может быть переписан в следующей форме

$$\left(A_2\eta\right)(t) = u_2(t)\eta(t) + \frac{v_2(t)}{\pi i} G_{T_+}(t)\int_{T_+} \frac{2\tau}{\tau^2 - t^2} G_{T_+}^{-1}(\tau)\eta(\tau)d\tau,$$

Оператор A_2 преобразуется с помощью невырожденных матриц $G_{T_+}^{\pm 1}(t),\ t \in T_+$ к оператору $G_{T_+}^{-1}A_2 G_{T_+} I_{T_+} =: A_3$,

$$\left(A_3\eta\right)(t) = u_3(t)\eta(t) + \frac{v_3(t)}{\pi i}\int_{T_+} \frac{2\tau}{\tau^2 - t^2}\eta(\tau)d\tau, \tag{1.6}$$

где

$$u_3(t) = \begin{pmatrix} a_{2,11} & a_{2,12} \\ a_{2,21} & a_{2,22} \end{pmatrix}, \quad v_3(t) = \begin{pmatrix} b_{2,11} & b_{2,12} \\ b_{2,21} & b_{2,22} \end{pmatrix}, \quad t \in T_+.$$

Представим матрицы $u_3(t)$, $v_3(t)$ в виде

$$u_3(t) = A_0\chi_{(0,t_0)} + A_1\chi_{(t_0,t_1)} + A_2\chi_{(t_1,\pi)}, \quad v_3(t) = B_0\chi_{(0,t_0)} + B_1\chi_{(t_0,t_1)} + B_2\chi_{(t_1,\pi)},$$

где постоянные матрицы A_0, A_1, B_0, B_1 выражаются через $a_{2,ij}, b_{2,ij}, i, j = 1, 2$ следующим образом:

$$A_0 = C_{(0,t_0)}\begin{pmatrix} a_{2,11} & a_{2,12} \\ a_{2,21} & a_{2,22} \end{pmatrix}, A_1 = C_{(t_0,t_1)}\begin{pmatrix} a_{2,11} & a_{2,12} \\ a_{2,21} & a_{2,22} \end{pmatrix}, A_2 = C_{(t_1,\pi)}\begin{pmatrix} a_{2,11} & a_{2,12} \\ a_{2,21} & a_{2,22} \end{pmatrix},$$

$$B_0 = C_{(0,t_0)}\begin{pmatrix} b_{2,11} & b_{2,12} \\ b_{2,21} & b_{2,22} \end{pmatrix}, B_1 = C_{(t_0,t_1)}\begin{pmatrix} b_{2,11} & b_{2,12} \\ b_{2,21} & b_{2,22} \end{pmatrix}, B_2 = C_{(t_1,\pi)}\begin{pmatrix} b_{2,11} & b_{2,12} \\ b_{2,21} & b_{2,22} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

И, наконец, действуя на (1.6) слева оператором $N_{T_+}^{-1}$, а справа N_{T_+} приходим к характеристическому матричному сингулярному интегральному оператору на единичной окружности (1.3):

$$F^{-1}A_T F = D_T, \quad D_T = u_T I_T + v_T S_T \in [L_2^2(T)]$$

с кусочно постоянными матрицами коэффициентами, принимающими три значения на вещественной оси и имеющими разрывы в точках $t = 0, t = t_0^2, t = t_1^2$:

$$u_T(t) = A_0\chi_{(0,t_0^2)} + A_1\chi_{(t_0^2,t_1^2)} + A_2\chi_{(t_1^2,\pi)}, \quad v_T(t) = B_0\chi_{(0,t_0^2)} + B_1\chi_{(t_0^2,t_1^2)} + B_2\chi_{(t_1^2,\pi)}, \tag{1.8}$$

Здесь уже постоянные матрицы A_0 и B_0 задаются на контуре $(0, t_0^2)$, A_1 и B_1 задаются на контуре (t_0^2, t_1^2), A_2 и B_2 на $(t_1^2, 2\pi)$.

Для получения условий обратимости исходного оператора A_T воспользуемся результатами работы [3].

Введем необходимые обозначения, определения и приведем формулировки соответствующих утверждений из [3].

Пусть постоянные матрицы C_0, C_1, C_2, заданны на интервалах $I_0 = (t_0, t_1), I_1 = (t_1, t_2), I_2 = (t_2, t_0)$ соответственно. Построим по ним матрицу функцию

$$G(t) = \sum_{j=0}^{2} C_j \chi_j(t),\ t \in R, \tag{1.9}$$

где $\chi_j(t)$ - характеристическая функция интервала I_j ,заданная на R.

Пусть $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ - некоторые числовые невырожденные матрицы. Обозначим аргументы собственных значений матриц $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ через $2\pi\nu_{0k}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\quad 2\pi\nu_{1k}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $2\pi\nu_{2k}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ (k=1,2), соответственно . В случае когда матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют общие собственные векторы, мы, следуя [3], будем приписывать тот же самый индекс k числам "гамма"связанными с соответствующими собственными значениями. Причем, если матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ располагают только одним общим собственным вектором, то мы будем приписывать соответствующим числам "гамма"индекс $k = 2$. Введем числа

$$l_k(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sum_{j=0}^{2} \left(\nu_{jk}(\mathcal{A},\mathcal{B}) - [\delta_{jk}(\mathcal{A},\mathcal{B})]\right), \quad \delta_{jk}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{1}{p} + \nu_j - \nu_{jk}(\mathcal{A},\mathcal{B}), \quad k = 1,2; j = 0,1,2. \tag{1.10}$$

В этих формулах через $[x]$ обозначена целая часть числа x. В случае невырожденных C_j положим $\mathcal{A} = C_0^{-1}C_1$, $\mathcal{B} = C_0^{-1}C_2$. Сформулируем теорему из работы [3].

Теорема 1.1. (Theorem 3, C.294) *Для обратимости оператора $R(G_R) = P_R^+ + G_R P_R^-$, с матрицей функцией $G_R = E_2\chi_{(-\infty,0)} + \mathcal{A}\chi_{(0,1)} + \mathcal{B}\chi_{(1,+\infty)}$, в пространстве $L_p^2(R, \varrho)$ необходимо и достаточно, чтобы постоянные матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ не вырождались, числа $\delta_{jk}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ не были целыми и, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*
(i) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не имеют общих собственных векторов и $\quad l_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) = -l_2(\mathcal{A},\mathcal{B})$;
(ii) $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ не коммутируют, имеют общий собственный вектор, и $l_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) = -l_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$;
(iii) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутируют и $\quad l_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) = -l_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$.

Перепишем оператор D_T используя проекторы $P_T^+ = \frac{1}{2}(I_T + S_T)$ and $P_T^- = \frac{1}{2}(I_T - S_T)$:

$$D_T = (u_T + v_T)P_T^+ + (u_T - v_T)P_T^-,$$

Предположим $\det(u_T + v_T) \neq 0$, или в более подробной записи, используя представления коэффициентов (1.8)

$$\det((A_0 + B_0)\chi_{(0,t_0^2)} + (A_1 + B_1)\chi_{(t_0^2,t_1^2)} + (A_2 + B_2)\chi_{(t_1^2,\pi)}) \neq 0,$$

или

$$\det(A_0 + B_0) =\neq 0,\ \det(A_1 + B_1) =\neq 0,\ \det(A_2 + B_2) =\neq 0.$$

Умножим оператор D_T слева на матрицу $(u_T + v_T)^{-1}$, получим

$$P(G_T) = P_T^+ + G_T P_T^-, \quad G_T(t) = (u_T + v_T)^{-1}(u_T - v_T), \quad P(G_T) \in [L_2^2(T), L_2^2(T)].$$

С помощью операторов $\Phi^{-1} \in [L_2^2(T), L_2^2(R)]$, $\Phi \in [L_2^2(R), L_2^2(T)]$

$$\left(\Phi^{-1}\varphi\right)(x) = \frac{2i}{i+x}\varphi\left(-\frac{i-x}{i+x}\right),\ (\Phi f)(t) = \frac{1}{1-t} f\left(i\frac{1+t}{1-t}\right).$$

выполним сведение с единичной окружности T на вещественную ось $R = (-\infty, +\infty)$:

$$\Phi^{-1}P(G_T)\Phi = P(G_R),\ P(G_R) = \Phi^{-1}(P_T^+ + G_T P_T^-)\Phi = P_R^+ + G_R P_R^-,\ P(G_R) \in [L_2^2(R), L_2^2(R)].$$

где

$$G_R(x) = (u_R(x) + v_R(x))^{-1}(u_R(x) - v_R(x)),$$

$$u_R(x) = A_0\chi_{(-\infty,x_0)} + A_1\chi_{(x_0,x_1)} + A_2\chi_{(x_1,\infty)}, v_R(x) = B_0\chi_{(-\infty,x_0)} + B_1\chi_{(x_0,x_1)} + B_2\chi_{(x_1,\infty)},$$

$$x_0 = i\frac{1+t_0^2}{1-t_0^2}, \quad x_1 = i\frac{1+t_1^2}{1-t_1^2}.$$

Запишем матрицу $G_R(x)x \in R$, через постоянные матрицы функции, образующие исходные коэффициенты $a_{2,ij}(t), b_{2,ij}(t),\ t \in T$ в форме (1.9):

$$G_R(x) = C_0\chi_{(-\infty,x_0)} + C_1\chi_{(x_0,x_1)} + C_2\chi_{(x_1+\infty)},$$

где

$$C_0 = (A_0 + B_0)^{-1}(A_0 - B_0),\ C_1 = (A_1 + B_1)^{-1}(A_1 - B_1), C_2 = (A_2 + B_2)^{-1}(A_2 - B_2).$$

В случае невырожденности матрицы C_0, то есть матрицы $A_0 - B_0$, положим

$$\mathcal{A} = C_0^{-1}C_1 = (A_0 + B_0)(A_0 - B_0)^{-1}(A_1 + B_1)^{-1}(A_1 - B_1),$$

$$\mathcal{B} = C_0^{-1}C_2 = (A_0 + B_0)(A_0 - B_0)^{-1}(A_2 + B_2)^{-1}(A_2 - B_2),$$

и определим числа $\delta_{jk}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), l_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по (1.10). Мы пришли к теореме.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $\det(A_0+B_0) \neq 0, \det(A_1+B_1) \neq 0, \det(A_2+B_2) \neq 0, \det(A_0-B_0) \neq 0$. *Для обратимости в пространстве* $L_2(T)$ *сингулярного интегрального оператора*

$$A_T = a_T I_T + c_T S_T + b_T W_T + d_T S_T W_T,$$

с сохраняющим ориентацию сдвигом на единичной окружности $(W\varphi)(t) = \varphi(-t)$ *и коэффициентами, порожденными кусочно постоянными функциями* $a_{2,ij}$ *и* $b_{2,ij}$, $i = 1, 2j = 1, 2$, *(1.7) и функциям* $t,\ t^{-1}$, *обладающими автоморфными свойствами (1.2), условия*
(a)$\det \mathcal{A} \neq 0, \det \mathcal{B} \neq 0$;
(b) Числа δ_{jk} *не являются целыми* $k = 1, 2; j = 0, 1, 2$;
(c) выполняется одно из трех свойств: (i), (ii), (iii):
(i) у $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *нет общих собственных векторов и* $l_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -l_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;
(ii) $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *не коммутируют, имеют общий собственный вектор и* $l_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = l_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$;
(iii) $\mathcal{A}$ *and* $\mathcal{B}$ *коммутируют и* $l_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = l_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$;
являются необходимыми и достаточными.

Литература

1. **Карелин А. А.** On the Operator Equality and Some of Its Application// Proceedings of A.Razmadze Math. Inst. 2002. Т. 128. С. 105 – 116.

2. **Карелин А. А.** On a relation between singular integral operators with a Carlemann linear-fractional shift and matrix characteristic operators without shift// Boletin Soc. Mat. Mexicana. 2001. Т. 7. № 12. С. 235 – 246.

3. **Спитковский И. М., Ташбаев А. М.** Факторизация кусочно-постоянных матриц-функций с 3 точками разыва в классах $L_{p,\rho}$ и некоторые ее приложения// Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 291 – 296.

Автономный университет штата Идальго, CIAII, Пачука, Мексика.