Octaviano García Robelo

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas básicas

en niños de aulas mexicanas

Prólogo de
Frida Díaz Barriga

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

ÁNGELES EDITORES

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS BÁSICAS
en niños de aulas mexicanas
OCTAVIANO GARCÍA ROBELO

Coordinación autoral: RAMÓN GUERRERO LEYVA
Formación y diseño: LUCERO CÁRDENAS PRADO

Campanario 26
San Pedro Mártir, Tlalpan
México, D.F. 14650
Tel. (55) 55 73 96 64
e–mail angeleseditores@yahoo.com
www.**angeles**editores.com

ISBN: XXX–XXX–XXX–XX–X
Primera edición: enero de 2012

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial
Reg. núm. 2608

Impreso en México

CONTENIDO

PRÓLOGO

A pesar de todo lo que se ha escrito a la fecha en los planos nacional e internacional sobre el tema de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el nivel básico, la problemática que se deriva de este campo de conocimiento e intervención resulta inagotable y siempre vigente. Las posibilidades de investigación educativa y las miradas disciplinarias han sido muy diversas, aun cuando han tenido como común denominador la comprensión de los fenómenos involucrados y el desarrollo de enfoques educativos innovadores. En ese sentido, las teorías psicológicas del aprendizaje y del desarrollo, las aportaciones de la didáctica específica de las matemáticas y algunos enfoques instruccionales recientes han orientado las reformas curriculares en este campo, así como la formación de los profesores y el diseño de materiales educativos. En el libro del Dr. Octaviano García Robelo el lector interesado encontrará precisamente una interesante toma de postura de corte psicopedagógico y de orientación constructivista sociocultural que busca establecer un vínculo entre la teorización psicológica y la práctica pedagógica. El autor parte de revisar la problemática del bajo aprovechamiento y del fracaso escolar en las matemáticas que se enseñan en el nivel básico, particularmente aunque no exclusivamente, en el ámbito nacional.

Asimismo, resulta importante avanzar en el desarrollo de un enfoque educativo sustentado en las didácticas específicas y la psicología instruccional en diversos campos disciplinarios. Es importante señalar, de acuerdo a Silvia Dubrosky, que las teorías psicológicas aplicadas a la educación intentan ofrecer un marco de referencia que permita proyectar, reflexionar o evaluar los procesos de aprendizaje que tienen lugar en las escuelas. Pero el análisis de la complejidad de la realidad escolar hace que no haya un único punto de vista, ni una única teoría psicológica que nos permita interpretarla. Es necesario ubicarse en algún lugar de esa complejidad y desde allí, quizás se tendrá la oportunidad de analizar la relación entre teoría psicológica y práctica pedagógica. Con todas estas consideraciones por delante, procedemos a ubicar nuestro objeto de estudio y alcance del presente trabajo. Tomando como referente el triángulo didáctico alumno-docente-contenidos, su objeto de estudio se ubica en el acercamiento a una mayor comprensión de los procesos e interacciones educativas que ocurren en torno a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con base en el análisis de las interacciones entre los actores de la educación y las posibilidades y restricciones que plantean el currículo y el contexto escolar.

El autor realiza un acucioso análisis de la literatura especializada en el tema, a la par que recupera los trabajos de investigación propios, realizados durante sus estudios de maestría y doctorado en Psicología en la Universidad Nacional Autónoma de México. Al incursionar en diversas escuelas primarias oficiales, García observó que, según sus propias palabras, "había niños cursando el cuarto grado de primaria y que aún no lograban dominar los procedimientos algorítmicos de la suma y la resta, y menos aún mostraban un entendimiento conceptual de éstas y otras nociones matemáticas elementales, a pesar de que el currículo oficial prescribe que dichos aprendizajes deben adquirirse desde primero y segundo grado". Esto lo condujo a plantear que no podían entenderse de manera fragmentada los componentes cognitivos y motivacionales asociados a tales aprendizajes, si a la par no se analizaba de manera conjunta el papel del docente y el tipo de prácticas socioeducativas y culturales vinculantes. Por otro lado, el currículo oficial actualmente prescribe una enseñanza basada en el enfoque de resolución de problemas matemáticos de tipo abierto, relacionados con situaciones reales y complejas, en donde la mecanización de algoritmos resulta a todas luces insuficiente. En un intento por arribar a "un análisis más comprehensivo y holístico", el foco de dicho análisis deriva hacia la identificación de las concepciones de los docentes y del tipo de contrato didáctico que establecen con sus estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos de matemáticas elementales (la adquisición de la suma, la resta y la resolución de problemas aditivos). En última instancia, a lo que se quiere arribar es a entender si es posible y en qué medida, la apropiación significativa de parte de niños y niñas, de dichos saberes.

Como era de esperarse, para lograr ahondar en los procesos de interés, el autor optó por un estudio cualitativo de casos, que logró enriquecer mediante el enfoque de métodos combinados con una serie de análisis cuantitativos grupales. El trabajo de campo realizado implica el seguimiento durante un año escolar de dos grupos de alumnos y de sus profesores, donde se realizaron entrevistas, observaciones, videograbaciones, y la administración de un instrumento diseñado por el autor que valora conocimientos y habilidades matemáticas en los alumnos. Dicho instrumento es a mi juicio una de las aportaciones más relevantes de este trabajo, como también lo fue la adaptación de un sistema de rúbricas que permitió identificar los niveles de desempeño mostrados por los alumnos en las dimensiones de conocimiento matemático, estratégico y de comunicación de resultados.

Los hallazgos revisten el mayor interés; seguramente el lector encontrará en esta sección del libro muchas cuestiones que reflexionar y al mismo tiempo entenderá por qué la enseñanza de las matemáticas continúa siendo uno de los grandes retos de todo sistema educativo. En no pocos casos se encuentran coincidencias con los resultados de investigaciones internacionales, pero al mismo tiempo, aparecen diferencias e incluso aparentes contradicciones en la ruta esperada en el aprendizaje de los escolares, que hay que explicar de cara al currículo y al contexto estudiado. La comprensión del sistema de numeración decimal es lo que más se les dificultó a los grupos bajo estudio, aunque al mismo tiempo, los alumnos podían solucionar problemas aditivos sin haber aprendido aún las nociones básicas del sistema decimal ni los algoritmos formales previstos en el currículo, ya que los niños y niñas recurren a razonamientos y estrategias "naturales" o "inventados" para solucionar determinado tipo de problemas. Los conocimientos que resultaron ser más complejos fueron la comprensión del valor posicional, la aplicación del algoritmo de la resta y la solución de problemas de igualación y de comparación, debido a una falta de comprensión conceptual y algorítmica de la suma y la resta. En las concepciones docentes, se encontraron coincidencias con estudios previos, sobre todo con los trabajos que plantean la existencia de la denominada "docencia del sentido común", donde se explican los procesos de aprendizaje en términos de un determinismo biológico o sociológico, más que en términos de la influencia educativa y las situaciones didácticas planteadas en el aula. No obstante, hay que reconocer que los niños sí avanzan en el aprendizaje de los conceptos matemáticos a lo largo del año escolar; en ambos grupos hay logros importantes, principalmente en lo referido a conocimiento numérico y resolución de problemas aditivos.

Apelando a la terminología de Brousseau, el tipo de contrato didáctico que predomina en las actividades de aula bajo observación, se ubica en los contratos "fuertemente didácticos" de reproducción formal, condicionamiento y ostensión. En términos sencillos, esto implica que buena parte del tiempo la enseñanza se enfoca a la práctica de los procedimientos y a la mecanización de algoritmos, y sólo en contadas ocasiones se fomenta el razonamiento y el conocimiento conceptual matemático. Considero que es en este punto, en el análisis del tipo de contrato didáctico, que se puede arribar a la comprensión del tipo de prácticas socioeducativas y culturales que predominan en la enseñanza de las matemáticas, y lo que permite también entender, al menos en parte, por qué se arriba al tipo de resultados educativos que encontramos en nuestros escolares. Al mismo tiempo, la riqueza de este tipo de hallazgos reside en que permiten repensar hacia dónde orientar la formación de los profesores y la reflexión crítica sobre sus prácticas, cuestiones hoy en día tan en boga pero carentes en muchas ocasiones tanto de claridad como de profundidad. A través del discurso de los profesores y de lo que acontece en la realidad de sus aulas, es posible entender algo más: si los actores están apropiándose o no de las innovaciones planteadas en las reformas curriculares y en este caso concreto, la forma en que están modificando las tesis constructivistas y la didáctica de las matemáticas basada en la resolución de problemas, asuntos nodales en el currículo prescrito.

El autor concluye la obra con importantes reflexiones así como con propuestas viables y fundamentadas respecto a cómo atender la problemática identificada. En suma, este es un libro importante tanto para docentes como estudiosos del campo de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pero al mismo tiempo, de mucha actualidad e interés para todos aquellos que deseen entender el vínculo indisociable entre los procesos educativos y el fenómeno del aprendizaje en contextos situados. Enhorabuena al autor.

Frida Díaz Barriga Arceo
Ciudad de México, 2 de noviembre de 2010

INTRODUCCIÓN

En México, a diario son diversos los temas que se discuten, desde cuestiones políticas, sociales, económicas, culturales, educativas hasta climáticas; por ejemplo, las nuevas elecciones, las propuestas gubernamentales y sus incongruencias; la inseguridad social frente al narcotráfico y las redes criminales; el poco interés por la promoción de valores y comportamiento ético; las condiciones económicas tan precarias en que viven la mayoría de las personas y sus familias; el calentamiento global y sus efectos presenciados; la falta de interés y de aprecio por las artes; así como un futuro incierto que abarca la educación en general, que desemboca en los altos índices de rezago, reprobación y deserción, entre otros temas.

Frente a estas problemáticas que padece hoy en día México, sus efectos negativos también han repercutido a nivel mundial, por lo que pareciera que se redoblan esfuerzos tanto a nivel nacional como internacional para tratar de buscar y ofrecer alternativas como una solución conjunta. Esto último, bajo la consigna globalizadora de que si un país se muestra mal, afectará al resto del mundo, pero que seguramente también debe obedecer a intereses particulares de las potencias de primer mundo, y por supuesto a los intereses particulares dentro de los países donde se viven las problemáticas, matizados por la injusticia, la inequidad y la corrupción desbordada.

Pese a todo lo anterior, de manera muy acertada, una de las apuestas internacionales para tratar de solucionar y erradicar esas problemáticas ha sido la recomendación de mejorar la educación, por lo que de manera emergente las organizaciones mundiales han girado su foco de atención hacia la evaluación y el diagnóstico educativo en todos los niveles, con la sugerencia de que debe brindarse mayor atención a los resultados obtenidos en la educación básica de cada país, así como una mayor inversión en educación si los países quieren desarrollar su potencial de crecimiento a largo plazo, y si desean responder a los cambios tecnológicos y demográficos que están reconfigurando los mercados laborales.

De interés para el presente estudio, con respecto a la educación básica, se han puesto en marcha una serie de mecanismos de evaluación a nivel masivo. A partir del año 2000 la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) puso en marcha un operativo de evaluación denominado Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes, o Informe PISA, por sus siglas en inglés (*Programme for International Student Assessment*), que consiste en exámenes mundiales que se realizan cada tres años y que tienen como fin la valoración internacional de estudiantes de 15 años. Las evaluaciones iniciaron desde el año 2000 con énfasis en lectura, en 2003 con matemáticas y en 2006 con ciencias. Este proyecto continuará hasta 2015; en 2009 se realizó la evaluación correspondiente a lectura, cuyos datos se publicaron a finales de 2010.

En los resultados de las evaluaciones realizadas en 2000, 2003 y 2006, México ha ocupado el último lugar entre los países que conforman la OCDE, y los últimos lugares de los nuevos países asociados, a pesar de algunos avances mínimos en 2006. Esta clasificación sintetiza los resultados globales para mostrar un breve panorama de la situación internacional.

Por otro lado, esta problemática de la educación básica en el país ha sido constatada por los resultados de las evaluaciones nacionales mediante las pruebas *Enlace* y *Excale*, más referidas al logro de aprendizajes curriculares, aplicadas a niños de tercer grado y sexto de primaria, y secundaria, las cuales confirman los hallazgos de las evaluaciones de la OCDE, es decir, por partida doble se ha constatado el panorama desolador en nuestra educación. Porque independientemente de la duda sobre si son o no válidas y confiables estas pruebas para la población, ambos resultados coinciden en que los estudiantes de educación básica muestran rendimientos o competencias por debajo de lo esperado. Tal es el caso de los estudiantes de secundaria, donde más del 50 por ciento se encuentran en un nivel de logro educativo *insuficiente* en los dominios de matemáticas (INEE, 2009; SEP, 2010)[1].

Sin embargo, pareciera que el sentir de esta introducción fuera la de ver un país junto con un mundo gris y difícil de mejorar, al menos en el campo de la educación, aunque es imposible dejar de ocultar un sentimiento de tristeza y preocupación científica y personal ante esta situación. No obstante, es obligación de todos atender y colaborar en la urgente y necesaria solución que requerimos en la educación, con la necesidad de continuar los esfuerzos interdisciplinarios por parte de los profesionales, donde se considere la participación de los alumnos, los padres, los maestros, autoridades escolares, organismos sociales, el gobierno y la sociedad en general.

Ante estas dificultades que se dan en la educación básica, el gobierno y demás responsables de la educación en México, como la SEP, han tratado de solucionarlas con la implementación de planes y programas que incluyen la carrera magisterial, modificaciones curriculares en las universidades que forman profesionales de la educación, cursos o talleres de las materias, bonos económicos y reconocimientos, con los que se intenta elevar la calidad de la educación y con dudosos efectos favorables. En el mejor de los esfuerzos, por nuestra parte, los investigadores tratamos de emplear recursos teóricos y metodológicos derivados de la ciencia y la educación, con el objetivo de aportar conocimientos acerca del proceso de la enseñanza y el aprendizaje, que concluyan en propuestas que contribuyan a la mejoría de la educación básica.

Debido a su magnitud y complejidad, resulta difícil el análisis de los fenómenos educativos y sobre todo de las posibilidades de cambio a partir de investigaciones puntuales. No obstante, la investigación educativa sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de los diversos contenidos curriculares reviste interés, pues permite dar apertura a nuevas orientaciones y a la búsqueda de soluciones a problemas vinculados con el fracaso escolar de los alumnos. La complejidad del fenómeno educativo a nivel del análisis investigativo también se ha visto reflejada en los tipos de investigación predominantes en años anteriores, en los que en su mayoría se han investigado por separado los elementos involucrados en el proceso enseñanza-aprendizaje. Si bien sus resultados han sido útiles en la comprensión de cuál y cómo es el papel de los actores y de diversos elementos singulares dentro del fenómeno educativo, es necesario avanzar hacia la comprensión de la interrelación de estos elementos considerados en un proceso global y multideterminado, sumamente complejo y dependiente del contexto. Asimismo, resulta importante avanzar en el desarrollo de un enfoque educativo sustentado en las didácticas específicas

[1] En el capítulo 4 se abordan las investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas, donde se muestran los resultados obtenidos en las últimas evaluaciones nacionales e internacionales.

y la psicología instruccional en diversos campos disciplinares.

Es importante señalar que las teorías psicológicas aplicadas a la educación intentan ofrecer un marco de referencia que permite proyectar, reflexionar o evaluar los procesos de aprendizaje que tienen lugar en las escuelas, pero el análisis de la complejidad de la realidad escolar hace que no haya un único punto de vista, ni una única teoría psicológica que nos permita interpretarla. Es necesario ubicarse en algún lugar de esa complejidad y desde allí, quizás se tendrá la oportunidad de analizar la relación entre teoría psicológica y práctica pedagógica. Con todas estas consideraciones por delante, se procede a ubicar el objeto de estudio y el alcance del presente trabajo.

Uno de los ámbitos más importantes asociado a la problemática del bajo aprovechamiento y el fracaso escolar es el de la *enseñanza de las matemáticas*, en el cual se ubica esta investigación. Se ha pretendido construir una mirada psicopedagógica y contextuada, teniendo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas básicas como objeto de estudio, a través del *acercamiento a una mayor comprensión de los procesos e interacciones educativos que ocurren en torno a dicha enseñanza, considerando las interacciones entre los actores de la educación (profesor, alumnos) y las posibilidades y restricciones que plantea el currículo y la escuela.*

Este acercamiento tiene como antecedente el trabajo que el autor de este libro desarrolló durante el segundo año de residencia en el Programa de Maestría en Psicología Escolar, que llevó como título "Estrategias para favorecer el aprendizaje de resolución de problemas matemáticos", además de la experiencia, la visión, la reflexión y abstracción en el aula durante más de dos años. Específicamente en dicho estudio, así como en una diversidad de investigaciones que con posterioridad se reseñan en el presente trabajo, se observó con preocupación que había niños cursando el cuarto grado de primaria que aún no lograban dominar los procedimientos algorítmicos de la suma y la resta, y menos aún mostraban un entendimiento conceptual de éstas y otras nociones matemáticas elementales, a pesar de que el currículo oficial prescribe que dichos aprendizajes deben adquirirse desde primero y segundo grados. Asimismo, se encontró que no resultaba suficiente una intervención educativa centrada en los componentes cognitivos vinculados al aprendizaje de las matemáticas, que no

se podía olvidar el papel e intervención del profesor a cargo de la clase, así como también el saber planteado por el currículo oficial.

Esto condujo a plantear un estudio más amplio, con una mirada que integrara aspectos cognitivos y socioculturales y cuyo abordaje metodológico contemplara como unidad de análisis central el triángulo interactivo o didáctico: profesor-alumnos-contenidos. Dicho estudio se presenta en este libro y tiene como propósito central arribar a *la comprensión del papel que juega cada uno de los componentes del triángulo interactivo, así como la forma en que se interrelacionan, en términos de las concepciones, conocimientos y tipo de contrato didáctico que se establece durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas elementales (la adquisición de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos).*

Se decidió emprender un trabajo que permitiera, en la medida de lo posible, realizar un análisis más comprehensivo y holístico del proceso de enseñanza-aprendizaje que involucra estos conocimientos en los primeros grados de la educación primaria, en el contexto de una escuela pública mexicana. De esta manera, se establecieron como foco de observación y análisis las concepciones del docente, la práctica educativa y la interacción que establece con sus alumnos a través de determinadas situaciones educativas, sin dejar de lado el papel del contenido curricular y de las posibilidades de apropiación significativa de dichos saberes por parte del niño.

En atención a lo anterior, se propuso como objetivo general de la investigación, *analizar el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la resolución de problemas aditivos, tomando como unidad de análisis el referido triángulo interactivo*.

Se plantearon como objetivos específicos:

- Analizar los conocimientos (conceptuales y procedimentales) que adquieren los alumnos durante el aprendizaje de la suma, la resta y la resolución de problemas aditivos.
- Analizar las concepciones del profesor relativas a la enseñanza conceptual y procedimental de la suma y resta y la resolución de problemas aditivos.
- Analizar la relación entre el profesor y el alumno en términos del tipo de contrato didáctico que se promueve en el aula.

Se condujo un estudio de casos instrumental de corte cualitativo, el cual se combinó con una serie de análisis cuantitativos. Se trabajó durante todo un año escolar con dos casos: una profesora de primer grado de primaria y su grupo de alumnos, así como con un profesor de segundo grado de la misma escuela primaria, en una escuela pública ubicada al sur de la Ciudad de México. Asimismo, se condujo un seguimiento casuístico de los alumnos de aprovechamiento más alto y más bajo en el área de matemáticas en los grupos referidos. Los docentes fueron entrevistados por lo menos en dos ocasiones, en relación a sus concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, y se hicieron videograbaciones en el aula de algunas sesiones en las que impartían los contenidos matemáticos de interés en esta investigación. Para explorar el aprendizaje de los alumnos, se construyó y validó un instrumento sobre conocimientos y habilidades matemáticas (numeración, conteo, sistema decimal, algoritmos de suma y resta y la resolución de problemas aditivos) el cual se administró al inicio y final del ciclo escolar en ambos grupos. La estrategia metodológica y las categorías de análisis se enfocaron a la comprensión de los conocimientos logrados por los alumnos y al desarrollo de sus propias nociones y estrategias matemáticas, mientras que en el caso del profesor, se buscó clarificar su pensamiento didáctico y sus prácticas educativas, y de manera interrelacionada, el tipo de contrato didáctico que se celebraba entre alumnos y docentes en una serie de secuencias didácticas en el aula.

En la elaboración del marco teórico del estudio, se tomó postura a favor de una diversidad de autores y enfoques que permiten dar cuenta de modelos explicativos del proceso de aprender y enseñar matemáticas básicas en los primeros años de escolaridad, atendiendo a los procesos de construcción del conocimiento y cognición situada, así como al planteamiento de interacciones didácticas significativas. Se consideró relevante ofrecer una explicación del carácter social y cultural que tienen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela en el nivel elemental, acentuando el papel de los mecanismos de influencia educativa que tienen su expresión más clara en la enseñanza y en la actuación de los docentes. En congruencia con el enfoque teórico del trabajo, se plantea que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo que implica, por un lado, una labor activa de representación y construcción del conocimiento de parte del aprendiz, pero al mismo tiempo puede decirse que

ocurre debido a la interacción y construcción conjunta de significados entre el profesor y los alumnos. Visto así, el aprendizaje de las matemáticas no sólo implica acciones en el plano cognitivo, meta-cognitivo o intra-mental, sino también ocurre en el plano de la interacción y mediación con los otros, por lo que es a la vez un proceso social que ocurre en un contexto educativo y cultural determinado. Sólo una visión que conjunte estas diversas perspectivas puede explicar las facilidades y restricciones que enfrentan los alumnos al intentar aprender matemáticas y cuando son apoyados por su profesor como agente educativo.

Como punto de partida, se realizó una amplia revisión de las principales teorías que explican los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la mirada del constructivismo psicológico y sociocultural, y que intentan entender las cogniciones y prácticas de los actores educativos: el docente y sus alumnos. Se encontró que algunas teorías, como la psicogenética y cognitiva, están centradas en la explicación del proceso, contemplando los elementos de construcción del conocimiento en el plano de la auto-estructuración individual, mientras que otras, como la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, están centradas en el "proceso global y en las interrelaciones didácticas". Esta última es considerada como una de las teorías más útiles e importantes a nivel nacional e internacional y que se emplea hoy en día profusamente en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De esta forma, en el primer capítulo se abordan los principales enfoques explicativos del proceso de aprendizaje y enseñanza vinculados con las matemáticas básicas, desde las visiones psicogenética, cognoscitiva y sociocultural. Se puso especial atención a aquellos modelos explicativos y resultados de investigación afines al interés de este trabajo.

En el segundo capítulo se describe la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas de Guy Brousseau, en donde se considera que el lugar institucional donde se reproducen los conocimientos matemáticos de manera formal sigue siendo la escuela y en ella ocurren determinadas situaciones didácticas que hay que analizar para entender el por qué, cómo y qué del aprendizaje de las matemáticas. En esta teoría se propone que al ser la educación un acto social, es necesario tratar de reconocer las relaciones didácticas entre el profesor y el alumno, cómo se distribuyen las responsabilidades y obligaciones que surgen durante el acto de enseñar y aprender en términos de un contrato didáctico en particular. El autor distingue entre tres tipos principales de contrato didáctico, los cuales desglosa en otros más específicos: contratos no didácticos, contratos ligeramente didácticos y contratos fuertemente didácticos. Este abordaje resultó central para este estudio, dado que como antes se mencionó, uno de los objetivos de la investigación fue el análisis de los contratos didácticos celebrados en los grupos de primero y segundo grados que se estudian.

El estudio de las concepciones de los maestros permite reconocer cómo conciben su forma de enseñar, considerando el conjunto de creencias, representaciones mentales, imágenes, etcétera. Al comparar las concepciones de los maestros con su práctica, se puede reconocer la influencia de ellas sobre su pensamiento y a la vez cómo afecta su práctica educativa. Ya en la obra de Shulman se establece la importancia del análisis del pensamiento didáctico del profesor y de su interpretación como paradigma mediador de la enseñanza. En el caso de esta investigación, una cuestión importante fue dar cuenta de dichas concepciones del docente respecto a la enseñanza de las matemáticas, por lo que se recurrió a entrevistar a los profesores. De esta forma, en el análisis del pensamiento del profesor se exploraron las siguientes categorías:

- Formación previa
- Concepciones de la enseñanza de las matemáticas
- Concepciones acerca del alumno y su aprendizaje
- Contenidos importantes con relación a la suma, la resta y la solución de problemas aditivos. Métodos y estrategias de enseñanza.
- Evaluación del aprendizaje

En el capítulo 3 se describen los principales trabajos sobre las concepciones de los maestros que resultaron de interés, y en la sección respectiva de resultados se reportan las que se encontraron en los profesores de primaria entrevistados.

También se consideró importante hacer un recorrido somero por lo más reciente de la investigación en enseñanza de las matemáticas en nuestro país, por lo que se revisan los estados de conocimiento coordinados por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Comie) durante los años ochenta y noventa.

Así, en el capítulo 4 se reporta una síntesis de dichos estados de conocimiento, y también una serie de investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con los temas de suma, resta y resolución de problemas aditivos. En esta sección se concluye argumentando la necesidad de realizar investigaciones como la aquí propuesta, que sin descuidar el tema de los contenidos, se considere de manera integrada a la enseñanza, el aprendizaje y las interacciones entre profesores y alumnos. Por último, se integra un apartado sobre los resultados de las evaluaciones masivas nacionales e internacionales en educación básica, que ofrece un panorama general de lo que ha sucedido durante la última década, dando énfasis al área de las matemáticas.

En el capítulo 5 se plantea el método seguido en la investigación, incluyendo lo relativo al planteamiento del problema, las preguntas y objetivos de la misma. Se hace una descripción del contexto educativo y de los participantes, así como de las estrategias metodológicas empleadas, el tipo de instrumentos diseñado y el procedimiento seguido.

Con el propósito de ofrecer una visión panorámica de los principales resultados que se encontraron en esta investigación, el capítulo 6 inicia con una explicación de cómo se procedió al análisis de cada uno de los instrumentos aplicados y cómo se conjuntaron los resultados obtenidos para, a continuación, exponer con detalle los resultados encontrados en cuanto al conocimiento matemático de los niños, el análisis de casos de los alumnos de alto y bajo rendimiento, las concepciones docentes y el análisis de los contratos didácticos.

En el capítulo 7 se ofrece la discusión y conclusiones de los resultados de la investigación. Dentro de los más importantes, se encontró que los alumnos pueden solucionar problemas aditivos aun sin haber aprendido las nociones básicas del sistema decimal y algoritmos formales previstos en el currículo, ya que los niños recurren a razonamientos y estrategias "naturales" o "inventados" que les resultan efectivos para determinado tipo de problemas. Se encontró asimismo que la comprensión del sistema de numeración decimal es lo que más se les dificulta en los dos primeros grados de primaria. El instrumento desarrollado permitió diferenciar el nivel de rendimiento de los niños (alto o bajo) e identificar el tipo de estrategias alternativas que emplean, así como su entendimiento conceptual durante la resolución de problemas de suma y resta. A lo largo del ciclo escolar ambos grupos avanzaron en la adquisición del conocimiento matemático, principalmente en lo referido a conocimiento numérico y resolución de problemas aditivos. En promedio, se nota un avance significativo de la primera evaluación a la segunda, donde se observa que sólo los niños de alto rendimiento logran cubrir casi el 100% de los conocimientos esperados en todas las áreas exploradas. Las nociones más complejas, que pocos alumnos lograron dominar, fueron el valor posicional y la composición aditiva del número. Las estrategias alternativas o inventadas por los niños resultaron para ellos muy efectivas en tareas de resolución de problemas y operaciones (el uso de sus dedos, el empleo de materiales u objetos para hacer sus cálculos, recursos gráficos o cálculos mentales por aproximaciones), pero los docentes no toman en cuenta este saber ni lo aprovechan para anclar los procedimientos canónicos o algorítmicos formales.

Un elemento importante en la evaluación del conocimiento matemático del niño, fue la adaptación que se hizo del sistema de evaluación mediante rúbricas, basado en la *Illinois Rubric for Mathematics*, que permitió identificar los niveles de desempeño en el conocimiento matemático, estratégico y de comunicación de resultados que mostraron los niños en el instrumento anterior. En el momento de resolver los problemas, los resultados indicaron que la mayoría de los niños tienen dificultades para comprender y aplicar los conceptos que implican la suma y la resta, y principios matemáticos como el valor posicional del número, a pesar de poder resolver algoritmos de suma o resta, principalmente en problemas de comparación o que impliquen la resta. En cuanto a su conocimiento estratégico llegaron a identificar los datos más relevantes, podían establecer las relaciones entre las variables en problemas sencillos, pero a medida que se complicaban las relaciones en el problema, se les dificultaba aplicarlos correctamente, sólo dándoles la oportunidad de varios intentos lograron su resolución correcta. En lo que se refiere a la comunicación de los resultados, llegaron a dar alguna explicación del proceso de solución empleado, pero la comunicación llegó a ser difícil de interpretar, a pesar de que incluyeron un diagrama casi completo con algunas explicaciones.

Respecto a las concepciones docentes, se encontraron coincidencias importantes con estudios previos donde aparecen las visiones de la *docencia del sentido común*, mediante la cual se explican los procesos de aprendizaje de los alumnos en términos de un determinismo biológico o sociológico, más que en términos de la influencia educativa y las situaciones didácticas planteadas en la escuela y el aula. En particular, resalta el hecho de que los profesores no vinculan su práctica educativa con alguna perspectiva psicopedagógica en particular, ni con alguna propuesta estratégica concreta para enseñar matemáticas, aunque sí mencionan términos como enseñar a través de problemas, aprendizaje cooperativo, aprendizaje activo o construcción del conocimiento. Consideran que aun cuando la enseñanza de las matemáticas debe basarse en la resolución de problemas, la principal problemática en su aprendizaje y enseñanza es que se centran más en una instrucción mecanicista y memorística, descuidando la parte conceptual. Aún cuando creen que la evaluación es útil para ayudar al niño, ésta debe reflejarse ante todo en una calificación numérica final.

Al contrastar las concepciones docentes con sus prácticas en el aula, se encontraron coincidencias y contradicciones. A pesar de su pretendido rechazo a la instrucción mecanicista y de apelar a la necesidad del razonamiento de parte del niño, el análisis del tipo de contrato didáctico, con base en sus prácticas educativas reales en el aula, pone de manifiesto que los dos maestros basan su instrucción en un contrato fuertemente didáctico, al adquirir principalmente la responsabilidad de enseñar, de provocar un aprendizaje en el alumno, pero predominan los contratos de reproducción formal, condicionamiento y ostensión. En el caso de la profesora, predomina una enseñanza basada en la reproducción y repetición constantes de ejercicios relacionados con la temática del conteo, la identificación de la cardinalidad y del reconocimiento del numeral, con ejercicios simples de adición y en mínima proporción de ejercicios de sustracción, con la práctica del algoritmo sustentada en un resultado basado en el conteo, sin atender el procedimiento de solución, y sin la contextualización de problemas aditivos, que no tienen presencia junto el algoritmo de la resta. En el caso del profesor de segundo grado, pasa la mayor parte del tiempo frente al grupo mostrando y explicando las nociones que implican la adición y la sustracción, así como sus respectivos algoritmos, y el funcionamiento de los principios del valor posicional y de la composición aditiva; se apoya en el uso de material u objetos concretos o en el diagrama de un esquema sobre el pizarrón.

En ambos casos, pero particularmente en el de la profesora, la instrucción se centra en la transmisión del saber, basado en la memorización y la mecanización del conteo, la lectura y escritura, así como en la práctica de los algoritmos formales, y sólo esporádicamente se apela al conocimiento previo del niño o se indagan sus preconcepciones. En contadas ocasiones, y básicamente en el caso del profesor, se plantean situaciones donde el niño emplea las matemáticas para pensar, en donde tiene que explicar y comunicar el por qué de sus resultados o en donde las situaciones problema sean algo más que ejercicios convencionales. No obstante, los profesores propugnan por lo que entienden como participación activa de los escolares: la profesora concibe el diseño de situaciones lúdicas, le interesa que su clase sea divertida mediante el empleo del juego y de materiales concretos y atractivos; el maestro promueve la participación del grupo y se apoya también con material concreto, además de que proporciona ayuda individualizada a los niños. Sin embargo, las clases se centran en la transmisión del contenido procedimental, ya que la enseñanza gira en torno al aprendizaje de procedimientos formales, pero casi sin promover el entendimiento conceptual ni la autorregulación y contextualización de los mismos. Finalmente, de los contratos empleados en las clases de los maestros, el de ostensión muestra mayores posibilidades para que los alumnos se apropien de los conocimientos matemáticos que se intentan. El capítulo concluye con algunas sugerencias de investigación educativa futura y con las implicaciones educativas más importantes del estudio.

Posteriormente se encuentra el listado de referencias bibliográficas y los anexos principales de la investigación; dentro de estos últimos se encuentra la rúbrica para evaluar el conocimiento matemático del niño.

CAPÍTULO 1

La construcción del conocimiento matemático en el escolar: enfoques cognitivos y socioculturales

1.1 Piaget y seguidores

Para este trabajo es importante la comprensión de la evolución y desarrollo del conocimiento matemático en el niño, particularmente durante los primeros grados de educación primaria. La perspectiva psicogenética piagetiana ha sido una de las investigaciones más fructíferas en la explicación del presente objeto de estudio, por ello se revisan sus postulados centrales en este apartado.

Piaget (1967) y otros teóricos afines (Labinowicz, 1987; Ginsburg, 1977) postulan que el desarrollo de los niños transcurre a través de etapas cualitativamente distintas en relación con la adquisición y organización de su conocimiento. Piaget enfatiza las acciones físicas y la experiencia con el ambiente como básicas para el desarrollo cognoscitivo temprano, pero al mismo tiempo plantea que por sí solas no son suficientes, dada la importancia de los procesos de abstracción reflexiva que deben acompañar a dichas acciones.

Algunos de los conceptos centrales de la teoría piagetiana que permiten explicar la construcción de la noción de número y el pensamiento lógico-matemático son:

- *Esquema*, término que Piaget utiliza para referirse a los marcos de referencia cognoscitivo, verbal y conductual que se desarrollan para organizar el aprendizaje y para guiar la conducta. El desarrollo cognoscitivo ocurre no sólo por medio de la construcción de nuevos esquemas, sino también por la diferenciación e integración de los esquemas existentes.
- La *adaptación* es el proceso continuo de interactuar con el ambiente y aprender a predecirlo y controlarlo. Piaget identificó dos mecanismos de adaptación fundamentales implicados en toda acción: la acomodación y la asimilación. La acomodación es el cambio en la respuesta ante el reconocimiento de que los esquemas existentes no son adecuados para lograr los propósitos deseados. La asimilación es el proceso de responder a una situación estímulo usando los esquemas establecidos.

- El principio de *equilibración* es la suposición motivacional básica de Piaget que sostiene que las personas luchan por mantener un balance entre la asimilación y la acomodación conforme imponen orden y significado en sus experiencias.

De acuerdo a Good y Brophy (1997), se han analizado los cuatro conceptos primarios de Piaget para describir cómo se adapta el ser humano a su ambiente: se enfocan las situaciones con estructuras cognoscitivas compuestas de esquemas interrelacionados, asimilando ciertos aspectos en los esquemas existentes pero también acomodando aquellos esquemas por medio de la reestructuración o construyendo nuevos si es necesario, motivados por el principio de equilibración. La secuencia de la adquisición de esquemas es universal según esta teoría, pero los ritmos en los cuales se desarrollan los esquemas y las formas que adoptan, dependen de las diferencias ambientales, la adquisición de conocimiento por medio de la interacción social y factores de equilibrio únicos. El desarrollo de esquemas procede a través de cuatro periodos (etapas) cualitativamente distintos. De interés para este trabajo resultan los períodos *pre-operatorio* y de las operaciones *concretas*, ya que es ahí donde se ubican los niños participantes en este estudio, y en los cuales ocurre la adquisición del conocimiento del número y sus operaciones básicas.

En el período pre-operacional se atestigua el desarrollo de la imaginación y la capacidad para retener imágenes en la memoria; el aprendizaje se vuelve más acumulativo y menos dependiente de la percepción inmediata y de la experiencia concreta. Los niños comienzan a pensar de manera lógica, usando los esquemas cognoscitivos que representan sus experiencias previas con relaciones secuenciales o de causa y efecto, para predecir los efectos de acciones potenciales. A pesar de sus ventajas, la lógica pre-operacional es egocéntrica e inestable. Se afirma que los esquemas son inestables durante el período pre-operacional, debido a que los niños todavía no han aprendido a distinguir los aspectos invariables del ambiente de los aspectos que son variables y específicos de situaciones particulares. Se confunden con facilidad en los problemas de conservación, los cuales requieren que se mantengan aspectos invariables de objetos mientras manipulan aspectos variables.

En el período de las *operaciones concretas*, que comienza alrededor de los siete años, los niños se vuelven operacionales. Sus esquemas cognoscitivos, en especial su pensamiento lógico y sus habilidades de solución de problemas, se organizan en operaciones concretas. En el caso del número, una serie de operaciones concretas implica habilidades de clasificación para agrupar y reagrupar series de objetos, que como se verá más adelante, son fundamentales en la construcción del conocimiento matemático.

El pensamiento en el período de las operaciones concretas es *reversible*, de modo que los niños cuyas habilidades de clasificación se han vuelto operacionales pueden manejar preguntas complejas ante un cierto problema. Estos niños pueden invertir las combinaciones de subclases en clases más grandes y pueden invertir las divisiones de clases más grandes en subclases. Además, pueden realizar estas operaciones de manera mental, sin tener que mover los objetos.

Otra operación concreta es la *seriación*: la capacidad para colocar objetos en una serie que progresa de menos a más en longitud, peso o alguna propiedad común.

Conforme los niños se desarrollan a través de los años como operacionales concretos, de manera gradual alcanzan conceptos de *conservación*: capacidades para distinguir los significados invariables de clases de objetos o acontecimientos, de los aspectos variables, los cuales pueden cambiar si los ejemplos son reemplazados o transformados. Estos problemas proporcionan bases para las operaciones concretas paralelas usadas para razonar acerca de problemas de conservación.

Una operación concreta más es la *negación*, que implica el reconocimiento de que una acción puede ser negada o invertida para restablecer la situación original.

Otra operación concreta es la *identidad*, el reconocimiento de que las sustancias físicas conservan su volumen o cantidad aunque cambien, divididas en partes o transformadas de alguna u otra manera en su apariencia, en tanto que nada se agregue o quite.

Dentro de este orden, la operación concreta que ayuda a los niños a comprender este problema es la *compensación o reciprocidad* o reconocimiento de que un cambio en una dimensión es equilibrado por un cambio compensatorio o recíproco en otra dimensión.

Por lo tanto, las operaciones concretas no sólo permiten a los niños solucionar problemas específicos, sino que también ayudan a los estudiantes a desarrollar habilidades para aprender a aprender y capacidades de razonamiento lógico, que los ayudarán a hallar sentido a su experiencia general.

Piaget (1967) plantea que el niño construye tres tipos de conocimiento: el conocimiento del mundo físico, el conocimiento social y el conocimiento lógico-matemático, que están fuertemente interrelacionados y cada nuevo avance en el campo de alguno de ellos influye en el resto. Es de interés especial para este trabajo el conocimiento lógico-matemático, que se refiere a la adquisición de los conceptos de número, espacio y tiempo, y siendo el primero objeto de indagación en esta investigación, se explicará su desarrollo.

Los niveles del pensamiento infantil en el concepto de número

Para Piaget el número es una síntesis de dos clases de relaciones que el niño crea entre los objetos. Una de esas es el *orden* y la otra la *inclusión de clases*. Al contar los objetos, la manera de asegurarse de no saltar unos o de contar otros más de una vez, es ponerlos en orden; pero si la única acción mental sobre los objetos fuera el ordenamiento, entonces éstos no podrían cuantificarse, puesto que el niño los consideraría uno por uno y no como un grupo de muchos al mismo tiempo. Para cuantificar objetos como grupo, el niño tiene que ponerlos también en relación de inclusión de clases (Kamii, 1988). Así, el concepto de número implica las operaciones lógicas de seriación, clasificación y conservación de cantidad. La seriación es la habilidad cognitiva para seriar u ordenar las cosas en un continuo de acuerdo con alguna propiedad, y se relaciona con el aspecto ordinal.

La clasificación implica distinguir las características de las cosas para separarlas y ordenarlas de acuerdo a esas características, lo cual se relaciona con el aspecto ordinal del número. La conservación de cantidad (el número de objetos en el conjunto que permanece constante, independientemente de la forma en que se coloquen u ordenen los objetos) es imprescindible para poder captar tanto el aspecto cardinal como ordinal del número.

Las investigaciones de Piaget revelan varias ideas lógicas que inciden en la noción de número. Una vez que estas ideas lógicas se han desarrollado, el niño puede tratar las operaciones numéricas como parte de un sistema de operaciones afines.

Contar en voz alta es una de las primeras nociones de número aprendidas por los niños. Sin embargo, Piaget indica que esta habilidad puede fácilmente engañar a un adulto: el que un niño pueda contar no significa necesariamente que entiende los números. Es decir que el conteo como una característica del número, implica

una serie de principios lógicos que están encubiertos cuando el niño procede a aplicar el conocimiento del número.

Como complemento a las citas anteriores, Labinowicz (1987) hace una breve descripción de categorías y conceptos que implican y que explican la adquisición del concepto de número, de acuerdo a Piaget. Refiere que el concepto de número en los niños es consecuencia de una síntesis de las operaciones lógicas de seriación e inclusión de clases en un marco de trabajo integrado. Su concepto de número implica además las nociones de adición y multiplicación como consecuencias de la inclusión de clases y la correspondencia uno-a-uno. Los niños, más o menos a la edad de siete años, ganan una agilidad en el pensamiento que les permite invertir mentalmente las operaciones físicas. Este autor considera que esta reversibilidad les da acceso a la sustracción como la inversa de la adición, y a la división como la inversa de la multiplicación. Por ello no hay operación numérica que exista por sí sola. Toda operación se relaciona con un sistema de operaciones y de ideas lógicas. Esta síntesis es lo que Piaget identifica como *concepto de número*, el cual se puede considerar como indispensable para proseguir con el desarrollo y adquisición de más conocimientos matemáticos.

Por otra parte, Fischbein (1999) reconoce que Piaget es uno de los teóricos cuyas ideas han sido de las más utilizadas en la investigación de la educación matemática. Es muy reconocido por su concepción fundamental de que el estudiante no es un simple receptor del conocimiento. Por lo contrario, durante su progreso intelectual, el estudiante activa constructos matemáticos básicos y conceptos lógicos relacionados con el número, la geometría y constructos matemáticos complejos como la proporción. La organización activa de estos conceptos expresa la naturaleza de esquemas intelectuales característicos de cada período del desarrollo intelectual del estudiante. Lo más importante es que el surgimiento de esos esquemas estructurales depende tanto del nivel de madurez intelectual (expresando el respectivo estado intelectual) como de la experiencia del individuo.

Finalmente, en términos metodológicos, se puede decir que Piaget también contribuyó al entendimiento y exploración del pensamiento y aprendizaje infantil, mediante su método clínico basado en observaciones y entrevistas flexibles hechas a los niños, así como mediante la utilización de materiales físicos (Ginsburg, 1997). Estas aportaciones metodológicas a la exploración del pensamiento infantil han resultado de gran utilidad en la investigación educativa, y en el caso de la presente investigación se retomaron en la construcción y aplicación de las entrevistas a los niños y a los profesores participantes, tal como se verá en la sección correspondiente.

Sin embargo, en complemento a las aportaciones de esta teoría, diversos autores plantean que el conocimiento matemático y su enseñanza-aprendizaje en contextos escolares, no puede quedar explicado sólo en términos de cómo se desarrollan en el niño las nociones lógico-matemáticas al estilo de los planteamientos teóricos de Piaget y seguidores. También se menciona que para entender la construcción del conocimiento matemático, deben considerarse otros principios lógicos en la extensión del conocimiento del número, como son el principio del valor posicional y el de composición aditiva, en el sistema de numeración decimal. Así como la aplicación de estos principios en la comprensión del concepto y el algoritmo de la suma y la resta, aplicados durante la solución de problemas aditivos. El siguiente apartado revisa la importancia de estos principios y conocimientos matemáticos, y su aplicación en la solución de problemas.

1.2 Modelo de la instrucción guiada cognitivamente (Carpenter y colaboradores)

A partir de las ideas desarrolladas por el equipo de investigadores encabezados por Carpenter *et al* (1999), se plantea que los niños pueden tener concepciones de la suma, sustracción, multiplicación y división, diferentes a las de los adultos, lo cual no quiere decir que sus concepciones sean "erróneas". En efecto, sus concepciones tienen un gran sentido, ya que proveen las bases para el aprendizaje de conceptos y técnicas básicas en el entendimiento de estos conceptos, y Fuson (1988, 1992) es un antecedente de estas ideas.

En este enfoque se considera que la solución de problemas aritméticos es un eje que contribuye a explicar el conocimiento matemático de los niños. Por ejemplo, los problemas de sustracción pueden resolverse con diferentes estrategias, como trazar esquemas de complemento, utilizar gráficos o materiales, cuando un adulto podría simplemente sólo sustraer y resolverlos. De este modo, las diferentes soluciones que los niños pueden dar a los problemas, indican que hay distinciones entre diferentes tipos de problemas de adición y entre los diferentes tipos de problemas de sustracción, las cuales se reflejan en la forma en que los niños los piensan y resuelven.

Al resolver cada problema, el niño modela directamente la acción o la relación descrita en el problema. Por ejemplo, al resolver un problema de adición, el niño puede hacer grupos de un tamaño específico y contar ambos grupos para llegar a la respuesta. De esta manera, la acción y las relaciones en un problema tienden a influenciar las estrategias que los niños utilizan por un período de tiempo, pero los niños mayores no siempre representan todas las cantidades en un problema con objetos físicos. Con el tiempo, las estrategias de modelamiento directo dan forma a estrategias de conteo más eficientes, que son generalmente formas más abstractas de modelamiento de un problema matemático. Los niños también pueden inventar sus propias estrategias para resolver problemas y mostrar sus técnicas, de manera que utilizan su propio conocimiento del número natural. Este aspecto es importante y será retomado en la presente investigación, dada la importancia de conocer las estrategias que emplean los niños y que no siempre corresponden al procedimiento algorítmico del adulto, que el docente les está enseñando o que viene prescrito en el currículo.

Estos autores y otros grupos de investigación han encontrado que los niños no tienen sólo una estrategia particular que los lleva a la solución de un tipo de problema en particular. Incluso, si se les proporcionan oportunidades apropiadas y apoyo didáctico, los niños pueden construir por sí mismos estrategias que modelan la acción o las relaciones en un problema matemático.

En cuanto al papel de la enseñanza, Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef (1986) plantean el modelo denominado *instrucción guiada cognitivamente*; afirman que los niños ingresan a la escuela con una gran cantidad de conocimiento informal o intuitivo de las matemáticas, que puede servirles como base para desarrollar el entendimiento de las matemáticas del curriculum escolar primario. Dentro de la instrucción directa o formal, específicamente sobre los números, los algoritmos o los procedimientos, los niños pueden construir soluciones viables a una variedad de problemas. Las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división pueden ser definidas en términos de esos procesos intuitivos de solución-problema y los procedimientos simbólicos pueden ser desarrollados como una extensión de ellos. A nuestro juicio, esta idea empata con el principio básico de la teoría del aprendizaje significativo y de toda propuesta que se aprecie de constructivista: el aprendizaje ocurre de manera significativa sólo si se logra vincular lo que el alumno ya sabe con los nuevos contenidos por aprender.

Por otra parte, estos autores también consideran que para entender cómo es que los niños piensan sobre la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, es necesario considerar las diferencias existentes entre los tipos y formas de problemas que se les presentan (Carpenter *et al,* 1999). Aunque hay diversas formas en que los problemas pueden distinguirse uno de otro, una de las formas más útiles de clasificarlos es centrarse en los tipos de acción o relaciones descritas en ellos. Esta clasificación corresponde a la forma en que los niños piensan sobre los problemas. Como resultado, existe un esquema de solución diferente para cada problema, que provee una forma única para identificar la relativa dificultad que tienen los diversos problemas.

Para los problemas de adición/sustracción, se pueden identificar cuatro clases: *unión, separación, parte-parte-todo* y *comparación* (ver ejemplos en Tabla 1). El tamaño del número puede variar, así como el tema o el contexto de los problemas, sin embargo la estructura básica de los dos primeros tipos involucra una acción específica. En problemas de unión, los elementos son adheridos a un conjunto dado. En problemas de separación, los elementos son removidos de un conjunto dado. Los problemas parte-parte-todo involucran las relaciones entre un conjunto y dos subconjuntos. Los problemas de comparación involucran comparaciones entre dos conjuntos separados. Los problemas entre toda una clase involucran el mismo tipo de acción sobre cantidades o relaciones entre cantidades. Entre cada clase se pueden identificar distintos tipos dependiendo de cuál cantidad es la desconocida, o dónde se ubica la incógnita, de tal manera que pueden construirse un total de once tipos distintos de problemas.

Tabla 1. Ejemplos del tipo de problemas aditivos

TIPO DE PROBLEMA	EXPRESIÓN DEL PROBLEMA
Unión	Karla tenía 3 muñecas, su tía le regaló 5 más. ¿Cuántas muñecas tiene?
Separación	En el partido de futbol había 11 niños jugando. Dejaron de jugar 3. ¿Cuántos niños siguieron jugando?
Parte-parte-todo	Paty tiene 12 peces, Laura tiene 7. ¿Cuántos peces tienen las dos?
Comparación	Beto tiene 9 paletas. Jorge tiene 4 paletas. ¿Cuántas paletas más que Jorge tiene Beto?

En cuanto a las estrategias, Carpenter *et al* (1999) identifican un conjunto coherente de estrategias que los niños inventan para resolver problemas de adición y sustracción y cómo éstas evolucionan. Las distinciones respecto a los tipos de problemas se reflejan en los procesos de solución de los niños. En la mayoría de las estrategias básicas, los niños utilizan objetos físicos o figuras para modelar directamente la acción o relación descrita en cada problema. Con el transcurso del tiempo, las estrategias de los niños llegan a ser más abstractas y eficientes. Las estrategias de modelamiento directo son reemplazadas por estrategias más abstractas de conteo, las cuales pasan a ser reemplazadas con números. La expresión de números es un conocimiento matemático con operaciones y propiedades particulares que lo definen.

En este último punto Carpenter *et al* (1999) afirman que las soluciones de los niños no están limitadas a las estrategias de modelamiento y conteo, los niños aprenden los números dentro y fuera de la escuela, así como la aplicación de su conocimiento para resolver problemas. Los niños aprenden más ciertas combinaciones numéricas que otras, y frecuentemente utilizan un pequeño conjunto de acciones memorizadas para resolver problemas que involucran otras combinaciones numéricas. Los niños usualmente aprenden la estrategia de "dobles" (ejemplo: 4 + 4, 7 + 7) antes que otras combinaciones, y frecuentemente aprenden sumas de 10 (ejemplo: 7 + 3, 4 + 6) con relativa facilidad. Lo anterior implica que no todos los problemas ni operaciones aritméticas que aparentemente tienen la misma estructura o se resuelven con el mismo procedimiento algorítmico, tienen el mismo nivel de dificultad para los alumnos.

Las estrategias de conteo y de soluciones rutinarias son relativamente eficientes para resolver problemas. Sin embargo, cuando se da la oportunidad para resolver problemas con estrategias propias inventadas, los niños eventualmente aprenden una mayor cantidad de números y generalmente seleccionan estrategias que representan directamente la acción o las relaciones descritas en los problemas.

En cuanto a los niveles de desarrollo de las estrategias, existe una variación respecto a cómo es que los niños las utilizan. Cuando ingresan al jardín de niños, muchos pueden resolver algunos problemas utilizando estrategias de modelamiento directo, cuando tienen poca o ninguna instrucción formal en adición o sustracción. Algunos que entran en los primeros grados son capaces de utilizar estrategias de conteo, y un poco utilizar el recuerdo de números reales o soluciones rutinarias.

Algoritmos

Con respecto al conocimiento de la adición y la sustracción como una extensión del conocimiento del número, de acuerdo a Carpenter *et al* (1999) los algoritmos o procedimientos formales para calcular respuestas a problemas de adición y sustracción con varios dígitos, descansan sobre los conceptos numéricos con base diez. De acuerdo con estos autores, en el pasado esto había sido asumido como necesario para desarrollar conceptos numéricos con base diez antes que el niño pudiera sumar, restar, multiplicar y dividir números de dos y tres dígitos. Sin embargo, Carpenter *et al* (1999) sustentan que este supuesto no tiene pruebas válidas desde la investigación. A la larga, los niños que pueden contar pueden resolver problemas involucrando números de dos dígitos, aun cuando tienen nociones limitadas de agrupación por diez, es decir, aun cuando no comprenden a cabalidad las nociones básicas del sistema decimal.

Más bien, los problemas con números de dos o tres dígitos actualmente proporcionan un contexto para que los niños puedan desarrollar la comprensión del sistema decimal de numeración. De lo anterior se sugiere que los niños que no tienen un entendimiento completo de la representación numérica con base diez, pueden construir soluciones a problemas de varios dígitos que son útiles para ellos (Fuson, 1992). De esta forma, cuando los niños hablan de soluciones alternativas a estos problemas y desarrollan formas eficientes para resolverlos, su entendimiento numérico con base diez incrementa concurrentemente con su entendimiento de cómo aplicar ese conocimiento para resolver problemas. Los niños adquieren las técnicas y conceptos necesarios para resolver problemas al mismo tiempo que los resuelven, y su entendimiento de conceptos base diez se incrementa progresivamente.

Por otra parte, para Carpenter *et al* (1999) las estrategias utilizadas por los niños para resolver problemas que implican adición y

sustracción con varios dígitos son paralelas a las estrategias que utilizan con números pequeños. Los niños utilizan fichas para modelar directamente la acción en los problemas, e inventan estrategias mentales que son esencialmente abstracciones de esas estrategias de modelamiento. Los niños, al basarse en su experiencia de modelamiento con materiales base diez, pueden inventar sus propios algoritmos para sumar o restar sin los bloques. Estos mismos autores sugieren que en algunos casos, los algoritmos inventados por los niños son similares a los algoritmos estándares tradicionales enseñados en la escuela; sin embargo, otros son totalmente diferentes.

Un tipo básico de algoritmo inventado por los alumnos involucra sucesivamente incrementar o disminuir sumas o diferencias parciales. Otro tipo de algoritmo inventado consiste en manejar las decenas y las unidades por separado y combinar con posterioridad los resultados. Combinar las decenas y las unidades por separado resulta familiar para los niños y les permite relacionar el procedimiento con los algoritmos formales de la suma y la resta. Algunos niños utilizan una combinación de incrementar y combinar decenas y unidades, particularmente cuando están combinando números de dos o tres dígitos.

El empleo de estas estrategias (Hallahan, Kauffman y Lloyd, 1999) en algoritmos formales y en otros informales que los niños llegan a inventar fuera de la educación formal (Fuson, 1998), puede facilitarles encontrar el resultado correcto de las operaciones, y aproximarlos a la comprensión del algoritmo convencional.

Hasta aquí, se ha mostrado la importancia de la solución de los diferentes tipos de problemas matemáticos y el empleo de las estrategias propias que el niño puede desarrollar o derivar a partir del conocimiento matemático que éste ya trae consigo. Este es un aspecto fundamental que se retomará en la exploración de los procesos de construcción del conocimiento matemático en los escolares que participan en esta investigación, y permitirá explicar el desarrollo de las habilidades esperadas en relación al planteamiento curricular de la SEP. Pero por otro lado, también es importante considerar las situaciones didácticas durante la enseñanza de los conceptos y los algoritmos matemáticos.

Por ello, en el siguiente apartado se presenta el trabajo de Nunes y Bryant (1997), sustentado en los postulados teóricos de Jean Piaget y en la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud.

1.3 Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño (Nunes y Bryant)

En este apartado se describen aspectos relacionados con la competencia numérica, la adquisición del conteo, el sistema de numeración decimal y cómo cobran sentido la suma y la resta, de acuerdo a Nunes y Bryant (1997). La finalidad es ilustrar los posibles conocimientos previos que debe adquirir el niño antes de llegar al conocimiento formal de la suma y la resta durante la resolución de problemas matemáticos. En el seguimiento del tópico se encontrarán planteamientos que vienen desde Piaget (1967) hasta algunos de sus seguidores, como Ginsburg y Opper (1977), Labinowicz (1987) y Kamii (1988), quienes se centran en la explicación de los principios lógicos relativos al conocimiento matemático del niño.

Nunes y Bryant hablan de tres aspectos relativos a los conceptos que consideran medulares para el aprendizaje de las matemáticas:

1. Los niños y las niñas tienen que aprender una gran cantidad de conocimientos sobre las relaciones lógicas.
2. Deben dominar y después aplicar toda una serie de sistemas matemáticos convencionales.
3. Tienen que aprender ciertas relaciones matemáticas que originalmente consideraban vinculadas a situaciones específicas que tienen usos mucho más extensos, y principalmente deben coordinar estos tres tipos diferentes de aprendizaje.

En relación con el significado de la competencia numérica, para Nunes y Bryant ser competente, en cuanto a números se refiere, implica poder entender relaciones numéricas y espaciales y expresarlas utilizando las convenciones de la propia cultura. Es decir, emplear los sistemas de numeración y de medición, así como términos tales como área y volumen, herramientas como calculadoras y transportadores, etcétera. Para estos autores, sólo quien conoce las reglas lógicas puede entender y realizar adecuadamente incluso las tareas matemáticas más elementales. Para entender qué hace un niño cuando cuenta objetos tiene que aplicar muchos principios lógicos. Principalmente, tiene que comprender la naturaleza ordinal de los números, es decir, que éstos se encuentran en un orden de magnitud ascendente. También tienen que comprender la importancia del procedimiento que siguen cada vez que cuentan una serie de objetos, lo cual también implica una serie de reglas firmemente basadas en la lógica. Cada objeto debe contarse una vez y sólo una. El número final (denominado cardinal) es tanto el número de objetos en ese conjunto como el número que relaciona dicho conjunto de objetos con otros.

Estas reglas sobre los números ordinales y cardinales son reglas lógicas por excelencia, y los niños y las niñas necesitan entenderlas para comprender qué significa contar. Este es el primer aspecto convencional del mundo de los números que conquistan los escolares.

Los niños y niñas pueden llegar a comprender qué cambios pueden modificar una cantidad y cuáles no, pero saber que la suma aumenta una cantidad y que la resta la reduce no es suficiente. Deben comprender también que estos cambios tienen efectos inversos: uno cancela al otro, de manera que 5 + 2 – 2 = 5. Comprender esta regla es importante por varias razones, y una de ellas se relaciona con la denominada composición aditiva del número; y que por supuesto también tiene que ver con lo que Piaget y sus seguidores llaman reversibilidad, la suma y la resta se corresponden y se cancelan mutuamente.

Al respecto de estos principios lógicos, Nunes y Bryant mencionan que existen requerimientos lógicos que deben respetarse al pensar en términos matemáticos, que denominan *invariantes* a la manera de Piaget (1967) y Vergnaud (1997); términos análogos a los que se mencionan más adelante en Carraher, Carraher y Schliemann (1991).

El término *invariante* no sólo abarca los principios lógicos que analizó Piaget (conservación, transitividad, etcétera), incluye también las relaciones que las convenciones incorporan a las matemáticas pero que, una vez incorporadas, deben permanecer constantes. Para tener aptitudes numéricas los niños y niñas necesitan aprender sistemas convencionales. Aprender matemáticas supone algo más que simplemente dominar las reglas lógicas. A un niño que entiende las reglas lógicas necesarias para relacionar procedimientos matemáticos, todavía deben enseñarle convenciones y también algunos procedimientos. Las técnicas matemáticas obedecen a las reglas de la lógica, pero van más allá. Las convenciones son necesarias para dominar las técnicas y proporcionan maneras de representar conceptos, para así pensar en ellos y hablar de ellos. Por ejemplo, en nuestra cultura el sistema de numeración decimal ayuda a mantener el orden de las designaciones fijas, mediante la comprensión de esas convenciones para reagrupar las unidades de conteo sobre base diez. Es decir, para poder sumar unidades, formar decenas y así sucesivamente.

Nunes y Bryant proponen que aprender estos inventos culturales incrementa la capacidad del niño o niña de respetar principios lógicos. Nuestro sistema de numeración tiene como característica principal la estructura decimal. Al hacer una comparación con otros sistemas de numeración, argumentan que a los niños y niñas les suceden dos cosas como resultado de aprender y comprender la estructura de nuestro sistema de numeración. Una es que obtienen una manera de contar potencialmente poderosa. Con una estructura decimal, o cualquier otro sistema de base, pueden crearse números, sin ella se les dificultaría o no podrían contar. El segundo es que se convierte en una herramienta del pensamiento, como un medio para resolver problemas que no podrán resolverse sin un sistema de numeración.

Una vez que la niña o el niño ha aprendido un sistema de numeración, obtiene una herramienta matemática para pensar. Una característica distintiva es que el sistema de numeración oral utiliza expresiones diferentes para indicar unidades, decenas, y centenas, mientras que el sistema escrito utiliza una posición de derecha a izquierda (el valor del dígito 5 en 50 y 500 es diferente aunque el dígito sea el mismo). Es decir, pareciera que se invierten las posiciones de valor cuando se intenta expresar un número escrito, la atención se centra a partir del número mayor para poderlo expresar verbalmente.

El tener diferentes maneras de representar los números tiene dos consecuencias. Una es que ambos sistemas tienen la misma secuencia lógica, se tiene más de una fuente de experiencia para aprender esos principios lógicos, por lo que sería aceptable iniciar por el más fácil de dominar y aprender. Situación que en el momento de la enseñanza es cuestionable, de acuerdo a cómo el profesor lo trata de enseñar y a cómo el niño lo podría entender mejor, aspectos que serán analizados y discutidos en el apartado de resultados, específicamente en los estudios de caso.

Hay que resaltar que el empleo de convenciones o de inventos culturales, como es el sistema decimal, para algunos autores (Carpenter *et al,* 1999), no parece ser tan indispensable para que el niño logre aplicar correctamente conocimientos o conceptos matemáticos. Esto se podrá corroborar al analizar casuísticamente los resultados de algunos alumnos, e incluso también en el análi-

sis cuantitativo de los datos obtenidos en los grupos de primero y segundo grado.

Hasta este punto se han considerado dos aspectos diferentes de los conceptos matemáticos. El primero fue lo que se denominó invariantes, la lógica del concepto. El segundo fueron las convenciones utilizadas en matemáticas, es decir los sistemas de signos que se emplean para hablar sobre las matemáticas y razonarlas. Ahora queda un tercer aspecto: las *situaciones en las que se utilizan las matemáticas*, donde se pretende que este sea el punto central en que los niños logren integrar su acervo de conocimientos matemáticos. Al respecto, en muchas ocasiones los niños no saben o se encuentran con la problemática de qué procedimiento utilizar para resolver un problema. Esto, ante su dificultad por el desconocimiento y comprensión conceptual de la suma y la resta, y de su mismo algoritmo, así como de la aplicación de procedimientos a otras nuevas situaciones.

La dificultad de utilizar técnicas matemáticas como herramientas del pensamiento, se deriva de la relación entre el dominio de los procedimientos generales y su utilización en situaciones específicas. Dominar un procedimiento general no suele indicar cuándo éste es una buena elección para resolver un problema. Por lo tanto, se tiene que comprender la situación del problema para razonarla matemáticamente. La diferencia entre aprender procedimientos generales y comprender situaciones particulares es vital en las matemáticas. En palabras de Nunes y Bryant, para utilizar las técnicas y herramientas matemáticas apropiadamente se tiene que saber si las invariantes relacionadas con ellos son los mismos en la situación dada. Es la relación entre las invariantes en el problema y las invariantes en la herramienta matemática lo que define si ésta será la adecuada para una situación dada. La comprensión de diversas situaciones es lo que da sentido a los procedimientos matemáticos generales, ya que permite conocer lo que significa mantener algo invariante.

Una vez que se han explicado los elementos que deben considerarse para que la niña y el niño logren el conocimiento matemático, enseguida se tratará el tema del conteo y sus implicaciones.

El inicio del conteo

Gelman y Gallistel (1978), al tratar de ampliar los planteamientos piagetianos, realizaron una útil compilación de principios que los niños deben respetar cuando cuentan. Señalaron que existen tres principios para aprender a contar, específicamente en un solo conjunto de objetos.

1. Principio de *correspondencia biunívoca*. Al contar, deben contarse todos los objetos, y cada uno debe contarse una vez y sólo una vez.
2. Principio del *orden constante*. Cada vez que se cuenta deben pronunciarse palabras numéricas en el mismo orden.
3. Principio de *cardinalidad*. Contar se relaciona con la manera de decidir la cantidad real de objetos en el conjunto que se está contando, es decir, cómo saber si el total de objetos corresponde a la última palabra numérica pronunciada al contar.
4. Irrelevancia del *orden*. La relación entre un determinado objeto y cierto número concreto es irrelevante, ya que pueden contabilizarse en un lugar y posición diferente respecto del resto de los objetos. Lo importante es no repetir el número ni saltarse el orden numeral de la serie.

Estos requerimientos son indispensables. Un niño que no los respeta no cuenta apropiadamente; el que los respeta sí lo hace. Pero esto no quiere decir que el segundo niño comprenda lo que está haciendo.

Nunes y Bryant analizaron estos tres principios en niños con un rango de edad entre dos a seis años, en una serie de experimentos realizados por autores como Gelman y Gallistel, Gelman y Meck, Briars y Siegler y Fuson (en Nunes y Bryant, 1997), quienes son autores reconocidos en este campo. Sus investigaciones se enfocan en el conocimiento del número y en diferentes situaciones de conteo (por ejemplo, pedían que los niños contaran objetos en línea recta, en círculo, al azar, observar si un títere cuenta bien algunos objetos, etcétera). En su análisis concluyeron que los niños de cuatro años pueden contar relativamente bien con ayuda, pero pueden o no contar bien sin ayuda. En contraste, la mayoría de los niños y niñas de cinco años parecen tener un buen dominio de los principios de contar y cabe esperar que digan el número de objetos contados en conjuntos de 20 a 40 elementos. Sin embargo, otra cuestión es cómo utilizan dicho conocimiento.

De los estudios anteriores se dedujo, a partir de la aplicación del conocimiento del conteo de los niños en dos situaciones (una de equivalencia y otra para comparar grupos), que los niños y niñas saben contar bastante bien a los cinco y seis años, pero no se dan cuenta de que el conteo es la mejor herramienta para formar conjuntos equivalentes. Es probable que no se den cuenta de que el conteo es una medida del tamaño del conjunto, si bien pueden contar y decir cuántos objetos se encuentran en él. Como veremos en la sección correspondiente, se encontraron resultados similares en este trabajo, específicamente en el reporte de los estudios de caso, donde se observan situaciones semejantes aunque con niños de mayor edad.

De acuerdo con el análisis anterior, Nunes y Bryant proponen que si bien los niños y las niñas de corta edad tal vez no cuenten espontáneamente para comparar dos conjuntos, puede estimulárseles a hacerlo. Aunque pueden contar bien, no se dan cuenta de la importancia del conteo para comparar conjuntos u obtener conjuntos equivalentes. Más que en contar, se basan en otras estrategias o en otras indicaciones proporcionadas por la situación, tales como la longitud de las hileras (cuestión ya demostrada en las clásicas tareas piagetianas). Lo anterior ejemplifica que saben cómo pero no saben cuándo hacer algo. No se percatan de la importancia de contar porque no han relacionado el conteo con situaciones que le den significados distintos al de intentar averiguar "¿cuántos?". En otras palabras, aprendieron un procedimiento que tiene el potencial de utilizarse en muchas situaciones pero le atribuyen un significado limitado. En el caso de los que saben cómo contar, pero no se dan cuenta de su importancia, el desarrollo conceptual incluiría aprender nuevas situaciones en las que el conteo sea una buena estrategia.

En este sentido, existe una diversidad de principios y operaciones lógicas implicadas en el conocimiento del número (Piaget, 1967; Gelman y Gallistel, 1978; Nunes y Bryant, 1997). Sin embargo, no todos estos y más principios pueden estar en el conocimiento numérico de todos los niños, se concluiría que el número es un concepto polimorfo, capaz de asumir y promover múltiples sentidos: pese a que el uso particular de un número definido no puede a la vez ser cardinal y ordinal, operador, producto del conteo, algebraico, etcétera, es posible utilizar los números de acuerdo a esas diferentes perspectivas. Por tanto, los niños no construyen una noción ni una práctica únicas del número, sino nociones y prácticas múltiples, que a su vez se relacionan entre sí de muchos modos (Scheuer, 2005).

Resulta evidente que las actividades didácticas para niños y niñas de esta edad deben implicar su participación en situaciones variadas, en las que contar sea una buena estrategia para resolver problemas y en las que se puedan hacer inferencias basándose en el conteo. Se espera que la utilización de esta estrategia general les permita hacer del número algo más significativo para ellos. En otras palabras, la enseñanza a esta edad podría tener por objeto que el contar se convirtiera en una herramienta para razonar.

Comprensión de los sistemas de numeración

En este orden de explicación de los conocimientos matemáticos, Nunes y Bryant describen que una de las ventajas es que la mayoría de los sistemas de conteo se encuentran organizados de forma tal, que decir las palabras numéricas en un orden fijo se vuelve una tarea relativamente sencilla. Cuando se entiende la lógica de un sistema de numeración, se pueden formar una diversidad de números.

Una segunda ventaja es que una estructura de base también puede utilizarse para organizar un sistema de notación. Cuando se utiliza el valor posicional para escribir números, el dígito a la derecha representa unidades, el dígito a la izquierda de éste representa decenas, y así sucesivamente. En otras palabras, la propia estructura utilizada para contar se vuelve el eje de organización para escribir números. Una tercera ventaja es que los cálculos basados en la notación escrita se vuelven económicos y eficaces.

Sin embargo, para poder sacar provecho de este sistema es necesario comprender su estructura. Debemos ser capaces de visualizar que pueden crearse números grandes combinando números más pequeños. Cualquier número *n* puede descomponerse en otros dos números precedentes en la lista ordinal de números, de tal forma que su suma sea exactamente *n*. Esta propiedad o invariante de los números se conoce como *composición aditiva del número*, propiedad esencial de los sistemas de numeración de base.

En la explicación de las invariantes de los sistemas de numeración de base (conceptos de unidad y composición aditiva) se dice que un sistema de numeración de base implica contar unidades de tamaños diferentes. En nuestro sistema de numeración, por ejemplo, contamos unidades, decenas, centenas, etcétera. Se trata de unidades de diferentes tamaños que pueden agruparse en diferentes clases: la clase de las unidades, la clase de los millares, la

clase de los millones, etcétera. Debido a que utilizamos un sistema de base diez, cuando tenemos diez unidades de cualquier tamaño las reagrupamos en unidades de orden superior. Contar unidades de diferentes tamaños no es privativo del conteo de objetos. Los sistemas de medición plantean el mismo problema de los tamaños de las unidades (dinero, longitudes).

Para comprender del todo un sistema de medición, se necesita entender las equivalencias dentro del sistema. El tamaño de las unidades es importante tanto para contar como para ordenar cantidades.

Conteo y dominio de las propiedades del sistema de numeración

De acuerdo con Nunes y Bryant, las relaciones ya señaladas son una parte elemental del sistema de numeración. Hace tiempo que los maestros de matemáticas se dieron cuenta de que es importante que los niños dominen la estructura del sistema decimal, para poderlo utilizar al hacer cuentas. Sin embargo, no hace mucho que los psicólogos empezaron a investigar el origen de los conceptos que intervienen en el dominio de esta estructura. Si bien se realizaron algunas investigaciones sobre la enseñanza de esta estructura y sus consecuencias en la habilidad de los niños y niñas para sumar y restar números de varios dígitos (Resnik, 1982 y Hall *et al*, 1985, citados por Nunes y Bryant, 1997) se sabía muy poco sobre el inicio de esta comprensión. En la actualidad, varios estudios, como los de Carraher, Carraher y Schliemann (1991), han explorado la comprensión infantil de unidades y composición aditiva en el contexto del manejo del dinero.

A partir de sus propias investigaciones y de otras más, Nunes y Bryant deducen que ni sólo contar ni aprender a leer y escribir números, son experiencias decisivas para aprender la estructura de base diez, y argumentan que es mucho más importante que los niños aprendan la suma. Es decir, que estos conocimientos adquiridos deben llevarse o integrarse a otros conocimientos matemáticos más complejos.

Concluyen que si bien el sencillo conteo mediante correspondencia biunívoca es un principio muy importante, no es suficiente para que los niños y niñas comprendan nuestro sistema de numeración. En un sistema de numeración de base, la composición aditiva del número mediante unidades de diferente valor es un concepto fundamental. Si no se entiende, es difícil que los escolares aprendan a leer y escribir números. La composición aditiva, a su vez, parece depender más de la comprensión infantil de la suma que de la correspondencia biunívoca. Contar no es suficiente para que los niños y niñas comprendan el sistema de numeración.

Parece haber cierto orden en cómo evoluciona la comprensión infantil del número. La utilización de la estrategia de conteo en la suma antecede a la comprensión de las propiedades del sistema de numeración, lo cual sirve como base para que aprendan a leer y escribir números. A los niños y niñas se les pueden plantear problemas de adición en los que un sumando no sea visible. La necesidad de solucionar dichos problemas puede inducirlos a descubrir estrategias más eficaces para comprender el sistema de numeración.

Finalmente, en cuanto al valor posicional, se considera como un concepto importante en el desarrollo del pensamiento aritmético, que para ser comprendido y manejado adecuadamente requiere de un largo y complejo proceso (Cortina, 1997). La comprensión y manejo del concepto implica una diversidad de habilidades que participan en su construcción, que incluyen (con base en el análisis de Cortina): la elaboración de hipótesis sobre las posibles reglas de armado del sistema de numeración escrito (Lerner y Sadovsky, 1994); la habilidad para concebir y operar con agrupamientos (Bernarz y Janvier, 1988); el reconocimiento, en colecciones de objetos, de los valores representados por los dígitos de un numeral (Ross, 1990); el uso de unidades compuestas para contar (Steffe, Cobb y Glasersfeld, 1988); además de otros conocimientos numéricos como el hacer agrupamientos a partir de otros y el reconocer "distancias" entre cantidades (Jones, Thornton y Putt, 1996).

De manera específica, esta investigación se limitó a explorar actividades relacionadas con el principio del valor posicional, y la composición aditiva del número, donde se explica el entendimiento o las dificultades que llegan a presentar los niños de los estudios de caso. En esta evaluación se aplican una serie de actividades que miden este conocimiento de manera formal e informal, en donde de acuerdo a su comprensión y operatividad se les ubica entre los niveles 1 y 3.

Considerando la comprensión del sistema decimal como base de los conceptos y algoritmos de la suma y la resta, lo anterior da pauta acerca de cómo cobran sentido la adición y la sustracción en el conocimiento del niño y la niña, cuestión que se describe enseguida.

Cómo cobran sentido la adición y la sustracción

A los niños y niñas suele enseñárseles la suma y la resta mucho antes que otras operaciones aritméticas; no obstante, hay mucho que pueden aprender y comprender de estas dos partes básicas de las matemáticas. Por supuesto que tendrán que conquistar ciertos procedimientos, tales como llevar y pedir prestado en las sumas y las restas con varios dígitos, y ciertamente tendrán que aprender una serie de hechos (tales como que 3 + 2 = 5) que les ayudarán cuando tengan que sumar o restar mentalmente o sobre papel. Pero hay mucho más que aprender; la suma y la resta son conceptos bastante complicados, y hasta que los escolares no comprendan la base conceptual de esas operaciones no podrán utilizar los procedimientos que se les enseñan o los hechos que captan en la escuela. Este tema ha recibido mucho menos atención y ahora el foco más importante de la investigación de la suma y la resta es la resolución de problemas y la comprensión conceptual básica de estas dos operaciones.

En las escuelas regulares de educación primaria existe la preocupación de los profesores por enseñar los algoritmos de la suma y la resta de manera aislada, sin integrarlos en un contexto educativo que considere la resolución de distintos tipos de problemas matemáticos. Esta problemática parece no ser exclusiva de la educación elemental en México, pues también ha tenido sus dificultades y fracasos en los Estados Unidos de América (Gill, Ashton y Algina, 2004). En este trabajo se ha encontrado que si bien los profesores intentan integrar lo anterior en las tareas de resolución de problemas, existen algunas inconsistencias y restricciones que dificultan el aprendizaje en sus alumnos, como es el momento de enseñar el conocimiento del sistema decimal y su integración o no en las operaciones de suma y resta.

De esta manera, recapitulando lo que se ha revisado: invariantes, convenciones y situaciones, se puede decir que éstas son factores que resultan fundamentales en la adquisición de los conceptos matemáticos.

Ahora bien, Nunes y Bryant (1997) afirman que aunque los niños resuelvan problemas de cambio en los que se suma o se resta una cantidad, no necesariamente significa que hayan dominado los conceptos de suma y resta. Existen otras situaciones en la suma y la resta que representan distintos niveles de dificultad para los niños y niñas pequeños. Se trata de las situaciones parte-todo y las situaciones comparativas, que son similares a los tipos de problemas que se plantean en la sección de Carpenter *et al* (1999).

- Los problemas de *cambio* suponen dos tipos de significados del número: medidas estáticas y transformaciones. En la situación "Juan tenía tres gatos. Después Tomás le dio cinco gatos más. Ahora Juan tiene ocho gatos", tres y ocho se refieren a medidas estáticas y el cinco se refiere a un cambio o transformación.
- En las situaciones *parte-todo* los números se refieren a conjuntos de objetos que se continúan; no se transforma ninguna cantidad. Un ejemplo sería: "Cinco de los peces que Martín tiene en su pecera son amarillos y tres son rojos. ¿Cuántos peces tiene en total en su pecera?
- En el tercer tipo de situación a los escolares se les pide que cuantifiquen *comparaciones*. Por ejemplo: "Juan tiene ocho escarabajos y Tomás tiene cinco. ¿Quién tiene más escarabajos?" (una pregunta fácil). "¿Cuántos escarabajos más tiene Juan que Tomás?" (una pregunta difícil).

La dificultad de un problema no radica únicamente en la situación sino también en las invariantes de la suma y la resta o las operaciones del pensamiento (Vergnaud, 1982, cit. en Nunes y Bryant, 1997) que el niño debe comprender para resolverlo. Por ejemplo, un caso que resulta aún más difícil es cuando en un problema aditivo falta uno de los sumandos; aquí las invariantes involucradas exigirían posiblemente una resta o una estrategia de complemento para buscar el número faltante, esto dependería del grado de conocimiento matemático del niño o niña.

Los problemas en los que falta un sumando pueden resolverse de distintas maneras. Una es utilizar bloques o los dedos, en los que primero se cuentan un conjunto con dedos y después se agregan más dedos hasta completar el otro conjunto.

Otra manera de resolver los problemas sin un sumando es mediante la resta, estrategia que depende de que el niño entienda la resta como lo inverso de la suma. Por supuesto, para hacer esto se necesita comprender una invariante de la suma/resta (la relación inversa) y también realizar una operación mental (es decir, aplicar esta transformación inversa) antes de calcular el resultado de la operación aritmética.

Al resumir los resultados acertados de niños y niñas al resolver distintos tipos de problemas en los que se requiere la operación aritmética de suma y resta, los autores encontraron que los resultados sustentan claramente el supuesto teórico de que el análisis de las situaciones e invariantes utilizadas para resolver un problema influyen conjuntamente en su dificultad. Pero esos no son los únicos factores determinantes para que las niñas y niños pequeños realicen exitosamente las tareas de suma y resta. También es importante saber qué recursos están utilizando para llevar a la práctica los procedimientos de cálculo, es decir, qué herramientas del pensamiento o sistemas de signos están a su alcance.

La utilización de los dedos y de objetos para ayudarse a calcular es importante antes de la enseñanza formal, y sigue siéndolo durante los primeros años escolares del niño o niña.

En un análisis que realizaron Nunes, Schliemann y Carraher (1993) del papel de los sistemas de signos utilizados para hacer cálculos cuando se pedía a niñas y niños brasileños, de primero y segundo de primaria, que resolvieran ejercicios de suma y resta con números mayores de diez, concluyeron que la utilización de números escritos y algoritmos basados en números escritos, parecía ser un apoyo menos eficaz para encontrar una solución que los objetos manipulables (dedos, marcas sobre una hoja) o los números orales, situación que también se relaciona con los resultados encontrados con los niños y niñas de esta investigación.

Después de un análisis general de los conceptos de suma y resta, Nunes y Bryant (1997) proponen que con el fin de analizar los conceptos del niño, se necesita tomar en cuenta simultáneamente las situaciones descritas en los problemas, las operaciones mentales o las invariantes necesarias para resolver problemas particulares, así como los sistemas de signos que el alumno esté utilizando al resolver un problema. Por lo tanto, la comprensión infantil de la suma y la resta evoluciona a medida que el alumno domina más situaciones de problemas, al emplear una mayor variedad de procedimientos que utilizan diferentes invariantes y una variedad de sistemas de signos. En este caso se refieren a que el niño o la niña adquieren de manera general un conjunto de significados matemáticos y de estrategias que pueden implicar la suma y la resta.

¿A qué podrían referirse los números en distintas situaciones aditivas y sustractivas? Cuando los números se refieren a objetos en una situación concreta, tienen mucho más sentido para niños pequeños que cuando no se refieren a algo concreto. Hughes (1986, cit. por Nunes y Bryant, 1997) documentó la dificultad de los más pequeños para comprender sumas y restas sencillas, cuando se les presentan números que no se refieren a situaciones que les puedan dar sentido.

Dos tipos de pruebas denotan que es importante considerar las medidas estáticas y las transformaciones como algo distinto, al menos desde el punto de vista de la comprensión incipiente de los niños sobre los conceptos matemáticos. El primer tipo tiene que ver con cómo comprende el niño o niña las invariantes de la suma en el contexto de estos distintos significados del número. El segundo tipo de prueba se relaciona con el índice de respuestas correctas que los niños proporcionan a problemas con una transformación sustractiva, en contraste con los problemas sobre medidas estáticas *parte-todo*, cuando conocen el *todo* y una de las partes.

Es necesario distinguir entre el número como magnitud estática y el número como magnitud de transformación al estudiar el desarrollo conceptual en los niños, dado que la propiedad de la conmutatividad de la suma se reconoce con más rapidez cuando los números son magnitudes de conjuntos que cuando son magnitudes de transformaciones.

Por último, los niños crean diversas estrategias para trabajar con números, pero éstas inicialmente parecen relacionarse con diferentes situaciones. Utilizan la correspondencia biunívoca para formar conjuntos equivalentes. Los escolares usan la suma y la resta en situaciones que implican números como medida del tamaño del conjunto y números como transformaciones. Sin embargo, no utilizan ninguna de estas operaciones cuando tienen que tratar con números como medida de la relación estática entre dos conjuntos: los niños pequeños no pueden resolver problemas de comparación que impliquen una relación estática entre conjuntos. Sin embargo, puede inducírseles fácilmente a coordinar las estrategias que ya conocen para así aprender a resolver problemas de comparación. Este parece ser el último paso en la comprensión de las situaciones de la suma y resta con números naturales, que más adelante se perfeccionarán debido a su uso.

Hasta esta parte, con base en los planteamientos de Nunes y Bryant, se ha podido analizar el conocimiento matemático que trata de integrar el conteo, la numeración, el sistema de numeración

decimal, la suma y la resta, y la solución de problemas aditivos con base en tres conceptos teóricos: invariantes, convenciones y situaciones. En ellos se destaca que la variación de situaciones puede llevar a una mejor aplicación de procedimientos y conceptos matemáticos más amplios, que el simple hecho de que el niño sólo repita o memorice números.

Los trabajos anteriores prácticamente cubren lo correspondiente a las corrientes de psicología psicogenética y psicología cognoscitiva, que se han enfocado más en la explicación psicológica de cómo se da o evoluciona el aprendizaje de las matemáticas en los niños.

Sin embargo, a manera de síntesis y de acuerdo con Flores, el niño, al inicio de su desarrollo, comprende los principios matemáticos implícitos en la actividad de contar y en el manejo del sistema numérico y posteriormente aparecen los relacionados con la suma y la resta. Al respecto Vergnaud (1997) y Nunes y Bryant (1997) afirman, resumido por Flores (2003), que los principios se agrupan de la siguiente manera:

Para la actividad de contar:

- La correspondencia: saber que a cada elemento de un conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.
- El principio de orden constante: saber que cada vez que cuenta se deben pronunciar los nombres asignados a los números en el mismo orden.
- La cardinalidad: saber que el valor de un conjunto corresponde al del último número que se contó.
- La conservación: saber que el cardinal de un conjunto de objetos sólo puede cambiarse mediante la suma y la resta.

Para la comprensión del sistema de numeración decimal:

- El concepto de unidad: entender cómo se agrupan las unidades en clases con distinta denominación (unidades, decenas, centenas, etcétera) y entender el valor relativo de las unidades.
- La composición aditiva del número: saber que cualquier número *n* puede descomponerse en otros números precedentes siempre y cuando su suma sea exactamente el número inicial.

Para la comprensión de situaciones de adición y sustracción:

- Números naturales
- Números enteros positivos y negativos

- Suma
- Complemento
- Diferencia
- Las relaciones de comparación
- Las relaciones de reciprocidad y de inversión
- La propiedad conmutativa de la suma: comprender que el orden de los sumandos no altera el resultado.
- La propiedad asociativa: comprender que se puede calcular la suma de tres objetos *a*, *b* y *c* agrupando *a* y *b*, y agregando *c* o agrupando *a* y *c* y agregando *b*.
- La propiedad transitiva: comprender que si existe una relación entre un elemento *x* y un elemento *y* por una parte, y por otra entre *y* y un elemento *z*, entonces existe la misma relación entre *x* y *z*.
- La noción de elemento neutro: comprender que el cero tiene un valor nulo y que la suma y la resta del cero con otro número dan el mismo número.

Enseguida, dentro del enfoque sociocultural, se tratan de explicar las dificultades y procesos que engloba el aprendizaje de las matemáticas considerando el triángulo interactivo, revisando con posterioridad diversos trabajos que ubican la enseñanza de las matemáticas más como un proceso situado dentro de un contexto específico, vinculado a prácticas sociales y escolares relevantes y mediado por los otros.

1.4 La perspectiva sociocultural: enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como proceso de construcción socialmente mediado

Factores y procesos psicológicos implicados en el aprendizaje

Con el propósito de ilustrar el enfoque sociocultural, se presentan algunas propuestas teóricas que consideran más los aspectos contextuales y sociales, donde surge el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Onrubia, Rochera y Barberá (2001) proponen que en el conocimiento matemático se pueden considerar aspectos abstractos y concretos, uno al ser representados a un nivel cognoscente y el otro al ser aplicados en el mundo real. Esta dualidad hace que se pueda hablar de dos tipos distintos de significados relacionados con el contenido matemático; uno interno, formal, puramente

matemático, y otro externo, referencial, que vincula al sistema formal de las matemáticas con algunos aspectos del mundo real. Estos autores consideran que la coordinación de estos dos significados resulta compleja y puede ser un obstáculo central en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo anterior busca explicar lo que puede ocurrir dentro del aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en los momentos en que la maestra o el maestro tratan de enseñar contenidos específicos de matemáticas, que podrían ser descritos mediante aspectos contextuales y de interacción entre los actores escolares (profesores y alumnos), y no sólo en referencia a los aspectos cognitivos del aprendizaje individual en el alumno.

En este sentido, de acuerdo con Onrubia *et al* (2001), las capacidades implicadas en la pericia matemática incluyen tanto el dominio de una amplia base de conocimiento declarativo y de un conjunto igualmente amplio de procedimientos específicos, como la posibilidad de emplear de manera estratégica y de controlar metacognitivamente ambos tipos de conocimiento, y también una determinada actitud, inclinación y sensibilidad hacia las matemáticas. Pero esto no puede explicarse al margen del contexto educativo, del currículo, de las prácticas educativas o del contacto con el profesor.

Es necesario asegurar el aprendizaje del niño contemplando el trabajo escolar de aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos.

En particular (Onrubia *et al*, 2001):

- El conocimiento declarativo en matemáticas incluye el conocimiento de hechos (como una colección de eventos ordenada en función de un criterio), conceptos y sistemas conceptuales (que describen regularidades o relaciones entre hechos y que se designan mediante signos o símbolos) y principios (teorías o modelos explicativos o de naturaleza descriptiva normalmente basados en relaciones formales, lógicas y de causalidad) de carácter matemático. Por lo tanto, no se limita a un conjunto de definiciones y de teoremas al margen del proceso de demostración que los sustenta, sino que debe extenderse también a los procesos o caminos que conducen a estos enunciados o formulaciones finales.
- El conocimiento procedimental matemático supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones de las que se obtiene un resultado acorde a un objetivo concreto. El conocimiento proce-

dimental, a diferencia del declarativo, se caracteriza por la acción (saber hacer) frente a la enunciación. Tradicionalmente se suelen distinguir en el área matemática dos grandes tipos de procedimientos: los algorítmicos y los heurísticos. Mientras que los primeros llevan a una solución adecuada si se siguen todos los pasos prescritos, los segundos no garantizan una correcta solución, pero guían de manera sistemática el proceso para llegar a ella.
- El conocimiento condicional supone la aplicación intencional y consciente del conocimiento declarativo y procedimental en relación con las condiciones en las que se desarrolla la acción.

Lograr la vinculación y aseguramiento de estos tres tipos de conocimientos al enseñar matemáticas a los niños, podría asegurar las bases para un mejor aprendizaje, en este caso basado en una comprensión conceptual de la suma y la resta y no solo de los algoritmos. Sin embargo, sería necesario tratar de reconocer cómo se están dando estos procesos durante la práctica escolar, y tratar de detectar aspectos favorables y otros que pudieran estar afectando el aprendizaje y la enseñanza. En relación a los aspectos afectivos, relacionales y motivacionales, se plantea que aprender matemáticas abarca más que el aprendizaje de conceptos y procedimientos y su aplicación. Supone también el desarrollo de una cierta disposición hacia las matemáticas, que incluye tanto un conjunto de actitudes como una sensibilidad hacia el desarrollo de las actuaciones apropiadas y una inclinación y motivación hacía este ámbito del conocimiento. El desarrollo de tal disposición estará en estrecha relación con el tipo de instrucción que surja durante la enseñanza y el aprendizaje.

Actualmente hay un alto grado de consenso respecto a que el aprendizaje escolar es un *proceso de construcción socialmente mediado*. En el caso particular de las matemáticas, esto significa que el conjunto de elementos cognitivos y afectivos que se acaban de referir como implicados en el uso experto de las matemáticas, se adquieren a través de ese proceso de construcción social y culturalmente mediado por los otros, principalmente por aquellos que "saben más". Por lo anterior, es necesario integrar durante la instrucción prácticas educativas en las que se relacionen aspectos formales y de la vida real, destacando su utilidad dentro del contexto social del niño, y promover mecanismos adecuados de mediación y ayudas efectivas de parte del agente educativo.

Al respecto, dos aspectos merecen resaltarse en relación con esta construcción progresiva y negociada del conocimiento matemático. El primero es la importancia de los conocimientos informales o previos de los alumnos, desde los que el profesor debe plantear el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta base de conocimientos incluye nociones, habilidades y estrategias relativas a un amplio conjunto de aspectos, desde la numeración y el conteo hasta la resolución de problemas aritméticos, la organización y representación del espacio o la proporción, pasando por la planificación y la toma de decisiones sobre precios o compras.

El segundo aspecto, relacionado con el anterior, es la indicación de que la mejor manera de aprender matemáticas en la enseñanza obligatoria es en un contexto relevante de aplicación y toma de decisiones específicas, como es la resolución de problemas. En este entorno, y gracias a la ayuda del profesor, el alumno puede ir progresando en un proceso gradual que parte de sus conocimientos previos, y avanza hacia niveles cada vez más elevados de complejidad y abstracción.

De acuerdo a lo anterior, en la enseñanza de las matemáticas durante los primeros grados escolares, es necesario que el profesor conozca cuáles son los conocimientos y habilidades con los que cuenta el niño. Y sin duda, hasta el momento la mejor forma de enseñar matemáticas es enfocarse en la práctica y solución de problemas matemáticos, en la medida que éstos cumplan los requisitos de una verdadera situación-problema y no se restrinjan a resolver de forma mecánica ejercicios rutinarios.

Algunos criterios generales para la enseñanza de las matemáticas (Onrubia *et al*, 2001):

1. Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.
2. Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas.
3. Vincular el lenguaje formal con su significado referencial.
4. Activar y emplear como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.
5. Avanzar de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización.
6. Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas de alto nivel.
7. Secuenciar adecuadamente los contenidos, asegurando la inte-

rrelación entre las distintas capacidades implicadas en la adquisición del conocimiento matemático.
8. Apoyar sistemáticamente la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos.
9. Ofrecer a los alumnos oportunidades suficientes de "hablar matemáticas" en el aula.
10. Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje de las matemáticas.

En este planteamiento de las propuestas socioculturales, con un estilo más de aprendizaje situado, se ubica el trabajo de Lave (1991), quien discute la importancia de lo que se enseña en las aulas en términos de lo que el niño aprende o necesita en la vida cotidiana. Parte de una visión de las matemáticas donde éstas no se conciben como la realización de tareas cognitivas abstractas, sino como un saber cultural, un discurso y lenguaje profundamente vinculado con actividades socialmente organizadas y sistemas de significado.

Estos trabajos parten de un creciente interés en los estudios etnográficos de las matemáticas cotidianas. En esta perspectiva se ha arribado a una especie de entendimiento sociológico de las matemáticas, el cual está teñido por un análisis que incluye lo que ocurre no sólo en la escuela, sino en los hogares o lugares de trabajo, y los aspectos relacionales que estructuran el conocimiento y aprendizaje de las matemáticas a través de toda la vida de un individuo.

Lave (1991) critica la visión de las matemáticas como el tipo de pensamiento abstracto a lo largo de una tradición de investigación en psicología cognitiva llamada "solución de problemas":

> "La solución de problemas es desafortunadamente un término frecuentemente utilizado sinónimamente con cognición, para describir, pero no para contextualizar tales actividades como prácticas aritméticas…"
>
> Lave, Murtaugh y de la Rocha, 1984.

En particular, Lave *et al* (1984) sugieren que la palabra "problemas" propone ciertas ideas sobre las matemáticas y la cognición: aquellas situaciones para el razonamiento que se presentan por sí mismas como problemas estructurados; estos problemas pueden ser resueltos para extraer información matemática desde una situación y un escenario hasta los cálculos necesarios; los resultados de esos cálculos pueden ser interpretados como soluciones para tales problemas. Lave argumenta que el razonamiento matemático debe ser visto como vinculado con las actividades entre las cuales éste toma lugar. Su conclusión central es que las actividades cotidianas de la vida no presentan problemas de corte claro, en el sentido requerido por la teoría de solución de problemas de la cognición.

Lave piensa que la unidad de análisis en el estudio del aprendizaje o construcción de conocimiento matemático, no es el conocimiento abstracto, sino la actividad estructurada y mediada. Esta autora afirma que la actividad, incluyendo la cognición, se organiza socialmente y tiene un fuerte carácter cultural. Describe que la gente ciertamente conoce cosas, pero ese conocimiento es para ser entendido como un atributo de las variedades de actividades estructuradas que la persona es capaz de utilizar con propósitos particulares, socialmente organizadas y ubicadas en escenarios específicos. Además, el conocimiento está localizado en las relaciones involucradas entre las personas y los escenarios en los cuales llevan a cabo sus actividades.

En sus investigaciones, algunas realizadas en los supermercados, Lave *et al* (1984) observan que los consumidores pueden llegar a resultados correctos más eficientemente empleando sus propios recursos, a diferencia de cuando tratan de resolver problemas formales en un formato escolar, por lo que concluye que la teoría de la solución de los problemas escolares no puede ser aplicada tal cual en la vida cotidiana.

Lave procedió a documentar lo que llama el vocabulario descriptivo en términos relacionales respecto a la resolución de problemas matemáticos. Este vocabulario descriptivo tiene dos propiedades: es dialéctico y opera en dos niveles. Cuando se pretende enseñar matemáticas dentro del aula, estas prácticas tienen un lenguaje particular, incluyendo términos y conceptos, que sólo pueden ser aplicables predominantemente en ese contexto del aula, pero resultan de poca utilidad en la vida diaria.

Resumiendo, lo interesante de esta postura es que se aparta de la visión clásica que concibe a las matemáticas como un aprendizaje abstracto, sustentado en procesos cognitivos y esquemas de conocimiento u operación intramental, y lo refiere a un aprendizaje de prácticas sociales y discursos específicos de dominio. Existe una crítica a la institución escolar, que no logra acercar los modelos de solución de problemas matemáticos a la vida cotidiana, pero que por otro lado esto tiene éxito en construir o modelar una identidad de lo que implica ser "niño" en el contexto escolar.

En esta línea de aprendizaje situado de la enseñanza de las matemáticas en los niños, Carraher, Carraher y Schliemann (1991), realizan una serie de estudios donde analizan y discuten ventajas y desventajas de la enseñanza escolar en relación con lo que el niño sabe, necesita y emplea en su vida cotidiana.

De acuerdo con Carraher *et al* (1991), Piaget fue, entre los estudiosos de la psicología, quien más contribuyó para que se llegara a reconocer que la lógica y las matemáticas pueden ser tratadas como formas de organización de la actividad intelectual humana. Sus estudios estimularon a los investigadores interesados en el análisis del razonamiento para que trataran de explicar los conocimientos lógico-matemáticos cuando resolvemos problemas de determinada manera. Para Piaget es el propio sujeto quien organiza su actividad y consigue, por medio de la evolución de esta organización, llegar a cambios que llamamos de desarrollo del pensamiento. En Carraher *et al*, la propuesta piagetiana de encontrar formas de organización lógico-matemática subyacentes a las actividades del niño, fue extendida a la investigación de las actividades cotidianas fuera y dentro de la escuela en diversos estudios, y esto es lo que acerca a este grupo a una mirada más sociocultural.

La relación entre la comprensión de los principios y modelos lógico-matemáticos subyacentes en la resolución de problemas en diferentes contextos culturales y su representación en esos contextos, es una preocupación de su trabajo que no tuvo lugar en los estudios piagetianos clásicos, aunque allí fueron analizadas las mismas estructuras lógicas. Carraher *et al* suponen que si se parte de que la actividad humana está organizada y se acepta la noción piagetiana de que las estructuras lógico-matemáticas pueden ser concebidas como las formas principales de esta organización, se tienen entonces cuestiones no esclarecidas. Por ejemplo ¿en qué medida la situación social influye en la organización de la actividad? En la escuela, las matemáticas son una ciencia, que enseña en un momento definido alguien de mayor competencia. En la vida, las matemáticas son parte de la actividad de un sujeto que compra, vende, mide y encarga piezas de madera, que construye paredes y hace el cálculo del ángulo.

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se hace sin referencia a lo que los alumnos ya saben, aunque tal enseñanza

debería ser, sin duda, más directamente beneficiada por el conocimiento de las matemáticas de la vida cotidiana. Carraher *et al* exploran la alternativa: el fracaso escolar o el fracaso de la escuela. El problema es presentado en forma un poco diferente por quienes atribuyen el fracaso escolar a la clase social.

Para el interés de este trabajo, destaca un estudio realizado por estos autores sobre la discrepancia entre el desarrollo de los niños de estratos de bajos ingresos, en situaciones naturales o cotidianas y en situaciones de tipo escolar donde hay que emplear matemáticas. En su metodología, combinaron observaciones etnográficas con un análisis experimental. En el estudio, cinco niños y adolescentes entre 9 y 15 años, cuyo nivel de escolaridad variaba entre 3º y 8º grado, respondieron a 63 preguntas en un examen informal de matemáticas y a 99 en un examen formal. En la resolución de problemas se encontraron diferencias significativas favorables a la resolución de problemas informales. El desempeño de los niños, además de haber sido claramente superior en el examen informal, donde los problemas están inscritos en situaciones reales, en el examen formal fue también mejor en los problemas de situaciones imaginarias en comparación a la solución de operaciones simples, abstractas y sin contexto alguno.

Con base en estos resultados, los autores suponen que el análisis lógico implícito en la resolución de problemas facilita la realización de la operación, porque ésta se ubica en un sistema de significados bien comprendidos, en lugar de constituir una actividad aislada que se ejecuta en una secuencia de pasos, los cuales llevarán a la solución. En el análisis cualitativo de los resultados, sugieren que los algoritmos que se enseñan en la escuela para realizar operaciones aritméticas pueden constituir un obstáculo para el razonamiento del niño, tal vez por interferir con el significado de los propios números con los cuales el niño debe operar. Carraher *et al* concluyen en esta investigación, que existen múltiples lógicas o estrategias correctas en la resolución de los cálculos, que no son aprovechadas por la escuela. Una de ellas es la llamada descomposición del problema o el uso de unidades naturales. Es posible que el niño adquiera fluidez en los métodos informales de composición o uso de unidades naturales sin dominar los métodos escolares (reglas de "llevo uno", multiplicación hecha por escrito, empezando por la ubicación de unidades, colocación convencional del número en el papel, etcétera).

Dentro de este contexto, el fracaso escolar aparece como un fracaso de la escuela, localizado en:

a) la incapacidad de comprender la habilidad real del niño
b) el desconocimiento de los procesos naturales que llevan al niño a adquirir el conocimiento, y
c) la incapacidad de establecer un puente entre el conocimiento formal que se desea transmitir y el conocimiento práctico del cual el niño, por lo menos en parte, ya dispone.

Al referirse al conocimiento formal, Carraher *et al* (1991) plantean que no significa que los algoritmos formales y modelos simbólicos deben ser desterrados de la escuela, sino que la educación matemática debe dar oportunidad para que esos modelos se relacionen con experiencias funcionales que les proporcionen significado.

En lo que se refiere al uso o no de materiales concretos, Carraher *et al* sugieren que no es preciso emplearlos, sino contextualizarse en situaciones en que la resolución de un problema implique la utilización de los principios lógico-matemáticos a ser enseñados, donde lo que distingue esas situaciones cotidianas de las situaciones escolares es el significado que tienen para el sujeto, el cual, resolviendo problemas, construye modelos lógico-matemáticos adecuados a la situación. Finalmente, Carraher *et al* afirman que la educación matemática, a través de situaciones cuidadosamente estudiadas, puede apuntar a la construcción de modelos matemáticos por los niños, quienes estarían empeñados en resolver problemas cuyo significado les orientase sobre los propios modelos matemáticos.

Una vez que se han descrito los enfoques cognitivos y socioculturales, en el siguiente capítulo se describen los principales fundamentos teóricos que corresponden a la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas, representada por Guy Brousseau (1997, 2000) y también descritas en trabajos recientes de Ávila (2001, 2006). Esta teoría toma en consideración los tres elementos participantes (niño, profesor, saber) en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es decir, el llamado triángulo didáctico o interactivo. Esta teoría contribuye, para los fines de esta investigación, a describir las prácticas educativas en términos del tipo de *contrato didáctico* que ocurre dentro del aula, con relación a los temas específicos de matemáticas que se tratan aquí.

CAPÍTULO 2

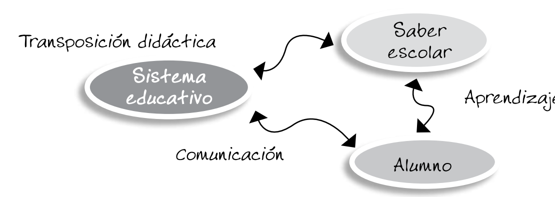
La teoría de las situaciones didácticas y el contrato didáctico en Guy Brousseau

2.1 Antecedentes de la teoría de las situaciones didácticas

Hace algunos años Brousseau (2000) planteaba cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos "necesarios" para la educación y la sociedad y cómo llevar al aula dichos aportes. Afirmaba que el comportamiento racional de una sociedad, es decir, su relación tanto con la verdad como con la realidad, no descansa únicamente en las virtudes individuales de sus miembros. Exige una práctica social y una cultura que deben enseñarse en la escuela. Las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales. Acerca de los recursos que se han creado para responder a esta demanda social, cuestiona en qué medida el éxito de la difusión de los conocimientos matemáticos depende de las ciencias de la educación o de las matemáticas, y qué instituciones pueden asegurar la coherencia y la pertinencia de este género de conocimientos.

Brousseau (1997) postula la teoría de las situaciones didácticas, que se presenta actualmente como un instrumento científico, misma que ha sido desarrollada a partir de la década de los sesenta. Esta teoría tiende a unificar e integrar los aportes de otras disciplinas, y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y de regulación de la enseñanza de las matemáticas. El autor plantea que con frecuencia se concibe a la enseñanza como la parte de las relaciones entre el sistema educativo y el alumno, que conciernen a la transmisión de un saber, y entonces se interpreta a la relación didáctica como una comunicación de informaciones (ver figura 1).

Figura 1. Relación didáctica del saber, el alumno y el sistema educativo



Este esquema tripolar está asociado habitualmente con una concepción de enseñanza, en la que el profesor organiza el saber por enseñar en una serie de mensajes, de los cuales toma lo que debe adquirir. Este esquema facilita la determinación de los objetos por estudiar, el papel de los actores, y la asignación del estudio de la enseñanza a diversas disciplinas. Por ejemplo, las matemáticas tienen la responsabilidad del contenido, y la pedagogía y la psicología cognitivas la de comprender y organizar las adquisiciones y los aprendizajes. El propósito de estos mensajes es esencialmente la aculturación del alumno por la sociedad.

Brousseau escribe que a propósito de estos fenómenos de aprendizaje, los psicólogos no han cesado de mostrar la importancia de la tendencia natural de los sujetos para adaptarse a su medio. Esto ocurre tanto en Skinner (papel de los estímulos), como en Piaget (papel de las experiencias personales en el desarrollo espontáneo de los esquemas fundamentales), o en Vigotsky (papel del medio socio-cultural).

Para Brousseau la enseñanza se convierte en una actividad que no puede más que conciliar dos procesos, uno de aculturación y el otro de adaptación independiente. Al hacer una crítica a los teóricos anteriores, Brousseau (2000) menciona la existencia de una impotencia de la psicología y de la pedagogía para intervenir de otro modo que no sea el estilo crítico y correctivo. Así pues, estos esfuerzos no consiguen modificar sensiblemente este esquema tripolar.

En los años sesenta, el *medio* (ambiente, material, social) del alumno no fue objeto de estudio en sí mismo. Se buscó construir un modelo del sujeto que aprende, del proceso de producción o de aprendizaje de conocimientos, o bien, de la estructura de los saberes. El propio Brousseau (2000) describe que siendo alumno de Pierre Grecó en psicología cognitiva, se impresionó por la habilidad de éste para concebir dispositivos experimentales destinados a poner en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños en las etapas de su desarrollo. Sin embargo, Brousseau se dio cuenta de que no se hacía ningún esfuerzo por analizar los dispositivos mismos y por hacer explícita la relación entre éstos y la noción matemática cuya adquisición era estudiada.

Para Brousseau era preciso extender estos trabajos al estudio de los dispositivos mismos y de sus relaciones con tal o cual conocimiento. En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como

un sistema. La caja negra es, entonces, el *medio*. De acuerdo con Brousseau, en esa época la aplicación, en un sentido literal, de las estructuras matemáticas sobre los objetos y sobre relaciones muy diversas era interesante, pero confinaba al alumno al papel de espectador, y al profesor al de presentador del espectáculo. En el mejor de los casos, hacer actuar al alumno consistía en comunicarle las condiciones y las propiedades de un sistema generador y en hacerle producir los conocimientos previstos (fórmulas, declaraciones, etc.) mediante la aplicación de las reglas enseñadas previamente.

Esta actitud conduce naturalmente a considerar un problema o un ejercicio, no como una simple reformulación de un saber, sino como un *dispositivo*, como un medio que “responde al sujeto” siguiendo algunas reglas. ¿Qué juego debe jugar el sujeto para tener la necesidad de dicho conocimiento? ¿Qué aventura –sucesión de juegos– puede llevarlo a concebirlo o a adoptarlo? ¿Qué información, qué sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer tal conocimiento en lugar de tal otro?

Brousseau dice que ha llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio, que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. Se observa que la misma palabra “situación” sirve, en un sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones que enmarcan una acción, como al modelo teórico y eventualmente formal que sirve para estudiarla.

De esta forma, es en 1970 cuando se plantea el proyecto científico de este autor: se trata de construir el modelo de las situaciones utilizadas para introducir o enseñar las nociones matemáticas (y de criticarlas), así como de imaginar otras más apropiadas.

De acuerdo a Ávila (2001b), Brousseau se inició en la didáctica de las matemáticas como campo científico con un doble interés: analizar los procesos a que da lugar la comunicación del saber matemático escolar e indagar las mejores condiciones de su realización. Así, al considerar las interacciones entre instituciones e individuos alrededor de saberes como casos particulares de comunicación, la didáctica de las matemáticas sería la ciencia de las condiciones específicas de la difusión de conocimientos matemáticos útiles al funcionamiento de las instituciones humanas.

Tomada en esta acepción muy general, la didáctica de las matemáticas ambiciona describir los intercambios y las transformaciones de saberes a diferentes escalas, tanto en la escala de las relaciones interculturales del mundo como en la de un grupo o una lección particular.

El sistema didáctico debe considerarse en la situación efectiva en la que se encuentra ubicado: la situación escolar, pues los sujetos en interacción (maestros y alumnos) son sujetos situados en un contexto (la institución escolar) que determina expectativas, códigos y comportamientos específicos.

El siguiente postulado, de clara influencia piagetiana, sería central en la teoría de situaciones: el alumno aprende al adaptarse a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno al medio, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

Pero Brousseau consideraba que el aprendizaje "natural" de la propuesta piagetiana corría el riesgo de liberar de toda responsabilidad didáctica al maestro. Para él la educación deberá provocar en el alumno las adaptaciones deseadas mediante una selección cuidadosa de problemas y situaciones que se le propongan. Por ello, lo que pondría en el corazón del análisis sería no la situación ante la que se colocara al sujeto piagetiano, sino la *situación didáctica*, la cual se define como un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre el alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

En ese orden de ideas, advierte Brousseau, considerar que el medio es la fuente de la aceptación de la responsabilidad es insuficiente; aceptar la interacción con la situación y las reglas de la interacción no es posible sino por la mediación de un contrato didáctico portador de derechos y obligaciones para maestro y alumnos. En virtud de lo anterior, esta última noción formaría parte esencial de la teoría de las situaciones didácticas y sería precisamente la que haría explícita la ubicación del sistema maestro-alumno-saber

en el contexto escolar. El contracto didáctico se pretende analizar en esta investigación, como una parte de los elementos importantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las competencias matemáticas que se describen en este trabajo.

Así, la descripción sistemática de las situaciones didácticas es un recurso más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían prácticamente tomar en cuenta los resultados de los investigadores en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un recurso privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir, finalmente, un recurso de comunicación entre los investigadores y los profesores. Brousseau (2000) plantea que en una situación "de aprendizaje" en la que el alumno debería "adaptarse a una situación objetiva" (y no a una relación dual con el maestro) produciendo él mismo el conocimiento, es necesario que la consigna o el proyecto de acción pueda ser concebido por el sujeto mismo sin el auxilio o posibles pistas de su solución, puesto que se trata de construir o de adquirir.

El conocimiento nuevo es entonces el recurso para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura, más económica, entre otras. Sin embargo, dentro de los objetos de estudio de la didáctica, el trabajo de los estudiantes y el trabajo de los maestros resultan importantes, al saber cuál es su papel dentro de esta teoría.

2.2 Objetos de estudio de la didáctica de las matemáticas

De acuerdo con Brousseau (1997), el trabajo intelectual del estudiante puede ser algunas veces similar a la actividad científica. El conocimiento de los matemáticos no implica el aprendizaje de definiciones y teoremas en orden para reconocer cuándo utilizarlos y aplicarlos. Se reconoce muy bien que hacer matemáticas propiamente implica tratar con problemas. Se hacen matemáticas cuando se trata con problemas, pero se olvida a veces que solucionar un problema es únicamente una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar sus soluciones. Una fiel reproducción de una actividad científica por el estudiante puede requerir que produzca, formule, pruebe, y construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías; que intercambie con otras personas; que reconozca esto como parte de la cultura; que utilice lo que le sea útil.

Para hacer posible una actividad semejante, el maestro debe imaginar y presentar a los estudiantes situaciones entre las cuales puedan vivir y entre las cuales el conocimiento pueda aparecer como la solución óptima y descubrible a los problemas planteados.

Dos trabajos son considerados dentro de la teoría de las situaciones didácticas:

1. El trabajo del matemático, primero consiste en identificar el conocimiento matemático nuevo que llegue a ser de interés para los otros. Todas las reflexiones irrelevantes deben ser suprimidas o retenidas. Entonces el productor del conocimiento despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza sus resultados tanto como sea posible. La organización del conocimiento depende de los requerimientos impuestos por el autor.
2. El trabajo del maestro es en la misma extensión lo opuesto al del investigador: debe producir una re-contextualización y una re-personalización del conocimiento. Este debe llevar al conocimiento del estudiante.

El maestro puede por lo tanto simular en su clase una microsociedad científica, si quiere utilizar el conocimiento como una forma económica de elaborar buenas preguntas y de resolver desacuerdos (saldar disputas), y si quiere el lenguaje como una herramienta para manejar o enseñar situaciones en la formulación de pruebas matemáticas como medios de convencimiento en las clases.

Pero el maestro debe proveer los medios de descubrimiento del conocimiento cultural y comunicable que quiere enseñar. Los estudiantes, en su retorno, deben re-contextualizar y re-personalizar su conocimiento de tal forma que identifiquen lo que producen con el conocimiento que está en uso en la comunidad científica y cultural de su tiempo. Para Brousseau, esto es una simulación; no es una actividad científica "cierta", en la misma forma, ese conocimiento presentado en un modo axiomático no es un conocimiento "verdadero". Hay un fuerte énfasis en las actividades sociales y culturales que condicionan la creación, la práctica y la comunicación del conocimiento y los mismos conocimientos.

Brousseau considera que una de las hipótesis fundamentales de la *didáctica* consiste en afirmar que únicamente el estudio global de situaciones, presidiendo sobre la manifestación del conocimiento, permite elegir y conectar el conocimiento desde diferentes orígenes, el conocimiento necesario para entender las actividades cognitivas de los sujetos, así como el conocimiento que el profesor utiliza y la forma como se modifica.

Una segunda hipótesis es que el estudio de las situaciones didácticas puede, al final, permitir la derivación o modificación de conceptos necesarios actualmente importados desde otros campos científicos.

La enseñanza es concebida como un proyecto social. Este punto de vista lleva a sustentar la parte medular de enseñar la discusión cultural y política del conocimiento, tratando esto, sin embargo, más como un objeto de estudio que es parte de las situaciones, que como una consideración filosófica preliminar.

Para finalizar esta parte, el autor menciona que una buena teoría epistemológica, acompañada por una buena ingeniería didáctica, es necesaria para integrar la didáctica de las matemáticas. Por otro lado, el estudio didáctico puede ser posible si se satisfacen dos condiciones:

- Que se haga evidente el fenómeno específico que aparece, para ser explicado por los conceptos originales que propone.
- Que indique los métodos específicos de prueba que son utilizados para ese propósito.

Estas dos condiciones son esenciales si la didáctica de las matemáticas es capaz de encargarse de sus objetos de estudio en una forma científica, y así permitir el control de las acciones sobre la enseñanza.

2.3 Situación fundamental

Ahora toca mostrar lo que Brousseau (2000) llama la hipótesis de la situación fundamental. Por razones heurísticas, Brousseau supone que *cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los otros.* El conjunto de situaciones que caracterizan a una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes, de variables y de cosas sobre estas variables. Pero *una situación fundamental no es a priori una situación "ideal" para la enseñanza, ni siquiera una solución más eficaz.* El valor de una situación para su uso didáctico se aprecia en función de un gran número de parámetros externos, tales como la posibilidad efectiva de ponerlos a disposición en un ambiente psico-cultural determinado.

Para ilustrar lo anterior, Brousseau (2000) presenta un ejemplo de *la situación fundamental del conteo*, donde se le dan instrucciones específicas al niño para que ponga en correspondencia pinceles y botes. El número no es más el *objeto* explícito de la pregunta, sino el *recurso* implícito para responder a ella. Es necesario observar que si bien los niños adquieren rápidamente ciertos esquemas verdaderos para cualquier número, la posibilidad efectiva de tomar estos esquemas como objetos de conocimiento y de tratarlos como saberes no se adquiere ni espontánea ni rápidamente. Será necesario además, tarde o temprano, no conformarse con su utilización, sino también dilucidar, formular y discutir sus propiedades y sus estructuras.

Se menciona que para que el niño sepa contar, debe ser también capaz de estar suficientemente seguro de su conteo para identificar las fuentes de error y en caso dado para discutirlas. Esta confianza en sus métodos exige a su vez una posición reflexiva con respecto a ellos, es decir, un "meta-conocimiento", también exige palabras para expresar los conocimientos adquiridos, un metalenguaje, y finalmente todo aquello que constituye la conversión de ciertos conocimientos en saberes. Se agrega que, con respecto a los métodos clásicos, esta situación fundamental de conteo puede revelarse útil en diversos momentos del aprendizaje y sobre todo para indicar a los profesores lo que quiere decir "contar" en términos "concretos".

Dentro de los usos razonados de las situaciones fundamentales en cuanto al empleo de los números, se concreta que el niño debe ser capaz de conocer las propiedades de las colecciones, de los números y de sus operaciones. El alumno debe necesariamente conocer estas últimas para poder controlar sus usos complejos. Será necesario también esclarecer, formular, discutir las propiedades y las estructuras numéricas.

Por otra parte, Brousseau destaca algunos elementos de la teoría de las situaciones: la búsqueda o la invención de situaciones matemáticas enseñadas en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, que constituyen la materia didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Tanto para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento, así como la idea que tienen de las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura de las matemáticas clásicas. Lo anterior, como una parte de las aportaciones de la teoría de las situaciones a la enseñanza de las diferentes nociones matemáticas.

En este sentido, con sustento en Brousseau (2000), a continuación se presentan una serie de conceptos generales aplicables a las matemáticas, una especie de meta-didáctica que no puede convertirse automáticamente para tratar a cualquier conocimiento.

De este modo, dentro de la estructura de las situaciones se incluye la descripción del modelo general de una situación. Donde una situación modela las relaciones y las interacciones de uno o varios actores con un medio. El modelo comprende una representación:

- de los estados del medio y de los cambios que los actores pueden imprimirle
- de aquello que se juega en la acción, generalmente un estado final del medio y el interés que el actor le asocia
- del inventario de las elecciones permitidas por las reglas.

Un conocimiento es pertinente si en esta situación es el recurso para poner en juego una estrategia o una táctica en la mejor de las elecciones permitidas en cada momento. Este modelo permite identificar algunos conocimientos de los sujetos. Permite después compararlos con otros conocimientos pertinentes, en particular con los conocimientos óptimos en esta situación. De manera importante, "el propósito de la teoría de las situaciones es permitir organizar localmente el aprendizaje de conocimientos elementales, considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto, y al mismo tiempo permitir su reorganización de acuerdo con las necesidades lógicas y teóricas que son el fruto de una adaptación completamente diferente de la sociedad" (Brousseau, 2000: 18).

Otro de los conceptos distinguidos en esta parte son tres tipos de interacciones fundamentales de un actor con su medio.

1. El tipo "acción" que consiste para el actor en fijar un estado del medio o en determinar o limitar las acciones de otros actores (materialmente o mediante reglas impuestas).
2. El tipo de "comunicación" que consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de información.
3. El tipo de "prueba" que tiende a la justificación o validación cultural de los actos o de las declaraciones (Brousseau, 2000).

Cada una de estas interacciones se modela mediante tipos de situaciones diferentes y pone en juego repertorios de recursos distintos. En las clases, esta clasificación de situaciones ha favorecido el establecimiento y la observación del tránsito de situaciones de argumentación a situaciones de prueba. No obstante, estas situaciones no sólo constituyen un paso importante desde el punto de vista de los procesos matemáticos, son además portadoras de un proyecto educativo esencial: el hacer del alumno un ser racional, social, autónomo y responsable, capaz de comprender cómo se establece y se comparte una verdad en una sociedad, mediante debates a la vez democráticos y constructivos.

En este orden de ideas, la "situación didáctica" tiene dos significados:

1. En el sentido clásico, es una situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar, tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca ese efecto.
2. Es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo.

En general, las situaciones de la enseñanza reales pueden descomponerse en un componente didáctico y en un componente no didáctico que puede desarrollarse simultáneamente o sucesivamente.

En cuanto a las concepciones y obstáculos, Brousseau destaca que "medios" y agrupamientos de situaciones apelan a conjuntos de conocimientos adecuados que pueden estructurarse en teorías matemáticas. Esta idea encuentra extensión en la teoría de las situaciones: los conocimientos de los alumnos se agrupan en "concepciones" que caracterizan una cierta manera de comprender y de utilizar una noción matemática en cierto campo de situaciones.

Las situaciones que encuentra un principiante en relación con un conocimiento nuevo son necesariamente poco numerosas y frecuentemente simplificadas. La adaptación de los conocimientos a este medio limitado conduce al alumno, y también al profesor, a utilizar concepciones que se manifestarán inadaptadas, aproximadas o incluso falsas en las situaciones que se encontrarán más adelante. No se trata de dificultades, sino efectivamente de conocimientos, primero necesarios, pero que perturban duraderamente los aprendizajes ulteriores y que persisten, incluso después de las adquisiciones de saberes correctos.

En el tema de la relativización de los conocimientos, la definición de los conocimientos en relación con su función en una situación, ratifica el hecho de que para una misma noción matemática, cada actor (sociedad, profesor, alumno) desarrolla conocimientos diferentes a priori según las condiciones en las cuales los utiliza, los crea o los aprende. Válidos o no desde un punto de vista académico, en cierta forma los conocimientos se legitiman y reconocen. Los conocimientos relativos pueden compararse con los "conocimientos científicos o académicos universales", pero hay que cuidarse de una confusión: el hecho de que sean "adecuados" no los hace por ello "verdaderos".

De acuerdo con Brousseau (2000), del gradiente y la transposición didáctica destaca que, en relación con una misma noción, dos actores pueden tener conocimientos diferentes, lo cual puede constituir un obstáculo para su colaboración si entran en una institución. La enseñanza sólo es posible si los repertorios no son demasiado diferentes y se realiza al precio de una adaptación de los conocimientos transmitidos, llamada transposición didáctica. Por otra parte, el hecho mismo de enseñar un conocimiento lo modifica, tanto para el que enseña como para el enseñado. La transposición es una modificación de conocimientos que altera su papel, la situación en la que intervienen. Es una condición y un efecto de la relación didáctica.

2.4 El papel del maestro y el contrato didáctico en la teoría brousseauniana

Brousseau (2000), al extender la idea del contrato social de Rousseau, destacó la noción de contrato pedagógico, en el que se precisan las obligaciones recíprocas entre alumno, sociedad y profesor.

Brousseau afirma que la relación didáctica no puede dar lugar formalmente a un contrato: las cláusulas no pueden escribirse; las sanciones en caso de ruptura no pueden ser previstas, etcétera. Sin embargo, la ilusión de que hay un contrato es indispensable para que la relación se dé y, eventualmente, tenga éxito. Cada uno, el maestro y el alumno, se hace una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa…y esta idea crea las posibilidades de intervención, de devolución de la parte adidáctica de las situaciones y de la institucionalización. El contrato didáctico existe por lo tanto como una ficción necesaria. El juego entre situaciones reales y situaciones ficticias también es indispensable.

En complemento a la explicación del contrato didáctico, Ávila (2001b) presenta una serie de conceptos fundamentales acerca de la teoría de las situaciones formulada por Guy Brousseau en los años setenta, teoría que ha tenido una fuerte influencia en la reforma curricular de la educación básica en México. Con respecto al subtema del contrato y la situación didáctica, Ávila (2001b) considera que la situación es portadora de condiciones que implican una adaptación del sujeto. Pero sólo su carácter didáctico obliga a que la adaptación (el aprendizaje) se produzca. En ello media el contrato didáctico. Así pues, la situación didáctica está constituida por una situación-problema (que vincula al alumno con el saber en tanto que sujeto epistémico) y un contrato didáctico (que vincula con la intención de enseñanza en tanto que sujeto didáctico). Esta sería una diferencia capital con la postura piagetiana. La autora considera que, según Brousseau, este fenómeno deriva del hecho de que el enseñante manifiesta sus expectativas al alumno a través de *camuflajes* didácticos a fin de obtener, a cualquier precio, los comportamientos esperados. Y el alumno acepta el juego.

Según Ávila, Brousseau refina el concepto de contrato y destaca el interés por el análisis de aquello asociado a la especificidad del conocimiento matemático, señala el carácter parcialmente implícito del mismo y aparece un elemento nuevo: el contrato implica una *distribución de responsabilidades* entre el profesor y los alumnos. En cuanto al tema del niño que deviene en alumno, la formulación del contrato inaugura la idea de un sujeto didáctico no reductible a lo social o epistémico, y pone de relieve que el análisis del funcionamiento cognitivo del alumno no se puede llevar a cabo sin tener en cuenta la situación escolar.

En síntesis, el contrato didáctico es un concepto que formula y explica la tensión existente entre las razones intelectuales y didácticas, y las formas en que participan en la relación didáctica (Ávila, 2001b).

2.5 Efectos del contrato didáctico

Respecto a los efectos del contrato didáctico, la transmisión del saber obliga a adaptarlo, a modificarlo, a recortarlo, a reorganizarlo. Tal proceso, que se llama transposición (Brousseau, 1997), es necesario pero en cierto modo es también lamentable, ya que el juego de relaciones y obligaciones que se establecen durante la relación didáctica produce diversos efectos, en ocasiones escasamente favorables a quien está en posición de aprender. Incluso algunos de estos efectos deterioran y llegan a sustituir los aprendizajes que se intenta transmitir. De acuerdo con Brousseau (1997), algunos de los fenómenos conectados con el control de la transposición didáctica pueden ser discutidos con respecto a diferentes marcos; el mismo fenómeno puede gobernar el interior de una lección o relacionarse a toda una comunidad por generaciones.

Dentro de estos fenómenos que pueden ocurrir se encuentra el fenómeno del *efecto Topaze*, el cual ocurre cuando el objetivo original del conocimiento desaparece completamente. La respuesta del alumno estará determinada previamente, por la selección y planteamiento de preguntas, así como por el manejo de situaciones que induce a la respuesta. Es decir que el profesor emplea una serie de preguntas y de pistas hasta lograr la respuesta esperada del niño, sin promover un razonamiento matemático en él. Entonces, si el objetivo del conocimiento desaparece completamente, se tiene el efecto topacio.

Brousseau sostiene que en el *efecto Jourdain* –así llamado por referencia a la escena en *Le bourgeois gentilhomme* en donde el maestro filósofo revela a Jourdain qué vocales y frases son realmente– existe una sobrevaloración de los conocimientos matemáticos reales que el niño logra adquirir, se cree que porque el conocimiento matemático está en la mente del maestro también estará en sus alumnos. Para evitar debatir el conocimiento con el estudiante y sus posibles fallas en el mismo, el maestro concibe reconocer la indicación de un ítem o punto de conocimiento científico en las respuestas, conocimientos científicos o en la conducta de los estudiantes, cuando sin embargo, éstos son motivados por causas y significados banales. Aquí, el deseo por insertar el conocimiento dentro de actividades familiares puede impulsar al maestro a sustituir otra *problemática* por la verdadera, alguna en específico, por ejemplo una metáfora o mnemotécnica que no dan el significado correcto a la situación.

En este mismo punto, Ávila (2001b) aclara que entre algunos efectos "*el efecto Jourdain*" describe la creencia de que si las ideas y los conocimientos están en la cabeza del profesor, entonces éstos estarán también en las de los alumnos.

En el *deslizamiento metacognitivo*, se dice que cuando una actividad de enseñanza ha fallado, el maestro puede sentirse forzado para justificarse a sí mismo y, para continuar su actividad, toma sus propias formulaciones y medios heurísticos como objetos de estudio, en lugar del conocimiento matemático original. Para Brousseau, este caso ocurrió en los años sesenta con el uso de gráficas para la enseñanza de las estructuras matemáticas.

Por otro lado, la *analogía* es un excelente medio heurístico cuando la persona lo utiliza con responsabilidad, pues su uso incorrecto en las relaciones didácticas lleva a reproducir los efectos de topacio. Esto es, si los estudiantes no logran el aprendizaje, pueden llegar a un segundo error con la misma materia. Para encontrar la solución leen las indicaciones didácticas y no se involucran a sí mismos en el problema. Y esto es en su interés para hacerlo así porque después de varias fallas con problemas similares, no identificables e irreconocibles, el maestro contará y dependerá de esas analogías para reprochar al estudiante por su obstinada resistencia.

Un fenómeno final que Brousseau menciona es el *envejecimiento* de las situaciones de enseñanza. Aquí el profesor encuentra dificultad para poder reproducir la misma lección con nuevos estudiantes. La reproducción exacta de lo que el profesor hizo o dijo previamente no tiene los mismos efectos y usualmente los resultados no son tan buenos. Quizás como una consecuencia, el profesor siente una cierta reticencia hacia su reproducción. Siente una fuerte necesidad por cambiar cuando menos la formulación de su explicación o sus instrucciones, los ejemplos, los ejercicios, y posiblemente de plano la estructura de la lección. Estos efectos se incrementan con el número de reproducciones y son tan fuertes como el número

de interacciones entre el maestro y los alumnos. Las lecciones que incluyen una explicación seguida por ejercicios, o una instrucción sencilla seguida por una situación de aprendizaje que no requiere la intervención del profesor, se modifican menos rápidamente. Al respecto, Brousseau (1997) se cuestiona acerca de la edad y el efecto del tiempo en las situaciones, qué es lo que realmente se produce durante el curso de una lección y si es posible en una misma situación didáctica producir los mismos conocimientos en un tiempo diferente. Así, el conocimiento que se produce en una situación de enseñanza es precisamente el objeto de la didáctica.

2.6 Tipos de contrato didáctico

De acuerdo con Ávila (2001a), en 1995 Brousseau se aproxima al análisis de la participación del profesor en la relación didáctica, desde una perspectiva que no había abordado. Coherente con el acercamiento sistémico que sostendrá en toda su teoría, considera que la enseñanza se caracteriza por las restricciones que acepta y por las que impone, y modela la participación del profesor en términos de los contratos didácticos que podrían regular la acción. Ávila describe que lo que caracteriza a cada contrato es una cierta distribución de la responsabilidad entre el profesor y los alumnos. Conforme a esta teorización, las distintas responsabilidades que puede asumir el profesor repercuten en las de los alumnos y dan lugar a diversos contratos, que van de los *no didácticos* a los *fuertemente didácticos.*

Ávila (2001b) presenta la siguiente descripción de cada uno de los diferentes tipos de contrato, los cuales serán útiles para explorar su posible aplicación y existencia en las prácticas de enseñanza, mismas que se analizan como parte de este estudio. De esta forma se tienen los siguientes tipos:

a) Los contratos no didácticos

Los contratos no didácticos son aquellos en los que el emisor (que puede ser el maestro) no tiene responsabilidad didáctica en relación con el receptor: no está encargado de enseñarle nada, y si modifica sus conocimientos, sus creencias o sus actos, esto es de alguna manera independientemente de su voluntad, y no conforme a algún proyecto intencional. Entre este tipo de contratos se encuentran:

1. El contrato de emisión, conforme el cual el emisor transmite su mensaje sin preocuparse de las condiciones efectivas de su recepción. En una situación límite, el emisor podría no tomar en cuenta ninguna restricción y emitir un mensaje incluso ininteligible. Este contrato es a veces observado en las clases: el profesor monologa sin tener en cuenta la presencia de los alumnos.
2. El contrato de comunicación, que es más exigente para el emisor. Éste se compromete a hacer llegar el mensaje al receptor y debe asegurarse de la buena recepción, aunque no del sentido que le da el receptor; la interpretación del mensaje en este contrato está completamente a cargo del receptor.
3. El contrato de experto, que es aún más exigente que el anterior. En él, el emisor garantiza la validez del mensaje mediante vías distintas de la simple emisión (de acuerdo con este contrato, un profesor que pretendiera comunicar una teoría matemática, debería enunciar los teoremas que la componen).

b) *Contratos ligeramente didácticos*

En estos contratos, el emisor acepta el compromiso de organizar el mensaje en función de ciertas características "teóricas" de su interlocutor; sin embargo, no acepta responsabilidades en cuanto a sus efectos sobre él. Los siguientes son contratos de este tipo:

1) El contrato de información. El emisor busca el asentimiento del receptor y, en respuesta a una demanda eventual, ofrece ciertas "pruebas o "referencias". El contrato de información puede ser dialéctico o dogmático; en el primer caso, se trata de una «gestión colectiva de la verdad», a la manera de los antiguos griegos; en el segundo caso, los rodeos del cuestionamiento por parte de los receptores pueden parecer pérdida de tiempo y entonces se acuerda mostrar las pruebas sistemáticamente, sin esperar a su demanda.
2) El contrato de utilización de conocimientos. Este contrato agrega una cláusula al de información: la de mostrar el empleo y utilidad de los conocimientos. El informador por consecuencia, debe acompañar el texto del saber con un campo de aplicaciones en el cual ese saber se supone juega un rol.
3) El contrato de aplicación y control. En los contratos precedentes el receptor decide si se considera suficientemente informado o si desea más información. En este nuevo contrato, el informador toma a su cargo parte de esa responsabilidad dando al informado un criterio para determinar si ha comprendido bien (y no sólo recibido) el saber comunicado. Ese criterio consiste en establecer una relación de equivalencia entre dos conjuntos de enunciados: el de los saberes comunicados y el del ámbito de las aplicaciones.

En opinión de Brousseau, los aspectos clave de esta noción son:

- Si bien en los contratos ligeramente didácticos la responsabilidad del emisor (el maestro) ha aumentado, el alumno conserva la responsabilidad principal: la de la realización efectiva de la comunicación. Él ejerce un cierto control sobre el profesor: si los mensajes resultan demasiado escuetos, demasiado obvios, él lo presiona a aumentar su contenido, a hacerlos más informativos.
- Los contratos ligeramente didácticos buscan que el alumno se apropie de un saber, considerándolo como un sujeto epistémico, pero no como sujeto efectivo, con características específicas.
- En ocasiones estos contratos, o las cláusulas que agregan, descansan sobre hipótesis cuya validez real queda por establecerse. Tal es el caso de la cláusula que establece una relación de equivalencia entre el conjunto de saberes enseñados y el ámbito de su aplicación.

c) *Los contratos fuertemente didácticos*

En estos contratos el enseñante toma la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. El profesor intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno. Entre los contratos estrictamente didácticos, Brousseau identifica:

1) El *contrato de reproducción formal*. Conforme a este contrato, el profesor se compromete a hacer que el alumno realice, por un medio cualquiera, una tarea que es culturalmente reconocida como marca de adquisición de un saber; por ejemplo, el alumno dirá el texto de un teorema, escribirá la solución de un problema, reproducirá una actividad determinada. El medio por el cual se logra la producción de la tarea no es im-

portante puesto que es la actividad en sí misma la que se supone fuente y prueba del aprendizaje. Además, los medios de reproducción, por imitación, no exigen formular razones o explicaciones. Así, la traducción de las órdenes del profesor en actos no exige el pasaje por el conocimiento previsto. Como contraparte, el compromiso del alumno se efectuará al hacer la tarea definida por el profesor, con la condición de que sea reducible al repertorio que posee.

2) El *contrato de condicionamiento*. Al no ser la reproducción de una tarea lo más frecuentemente la garantía de que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, es decir, como razones del saber que aquél ha aprendido. Entre estas causas se encuentran la asociación y la repetición. Aquí el rol del alumno es repetir, pues el profesor cree que el tiempo y la repetición se encargarán de familiarizarle con el objeto de aprendizaje.
3) La *mayéutica socrática*. Conforme a este contrato, el profesor escoge preguntas de las cuales el alumno puede encontrar las respuestas con sus propios recursos. Las preguntas se modifican en función de las respuestas del alumno; pueden ser abiertas o cerradas, como el diálogo del Menón, y pueden *a priori* utilizar cualquier vía retórica y obtener la respuesta adecuada por analogías o metáforas.
   La mayéutica colectiva provoca numerosos efectos didácticos más o menos negativos. Uno de los principales inconvenientes deriva de que tiende a excluir las interacciones del sujeto con un *medio* efectivo. Por otra parte, los problemas abiertos son difíciles de incluir en una mayéutica a causa de la dispersión de las respuestas que pueden provocar.
4) Los *contratos de trabajo empiristas*. En estos contratos se supone que el conocimiento se establece esencialmente por el contacto con el *medio* al cual el alumno debe adaptarse, la responsabilidad del aprendizaje es remitida a él. En las formas más simples, la lectura del *medio* es casi directa, el alumno percibe "viendo" la estructura (sin procesos intermedios, ni cultural ni cognitivamente). Esta posición ha sido identificada como *empirismo sensualista* (Aebli, 1958).
5) Los *contratos de ostensión*. La idea de la lectura del *medio* puede ser inmediata, conduce a estrategias didácticas de *ostensión*: el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre y aprende por frecuentación repetida de las mismas circunstancias. *Los contratos de ostensión* derivan de una concepción sensual-empirista. En estos contratos, el profesor «muestra» un objeto, o una propiedad, y el alumno acepta «verlo» como el representante de una clase de la cual deberá reconocer los elementos en otras circunstancias.
6) Los *contratos constructivistas*. Aquí, las situaciones que conducen al alumno al aprendizaje no son "naturales". El profesor debe organizar el *medio*. La organización deriva esencialmente del saber previsto y el conocimiento de los procesos de adquisición de los alumnos, a quienes se les delega la responsabilidad de la adquisición. Los saberes previos se manifiestan como prerrequisitos, es decir, como medios que permiten formular las condiciones iniciales de la situación. En estos contratos el alumno es considerado racional o al menos coherente y económico: se adapta al *medio* para minimizar sus esfuerzos o sus riesgos y para acrecentar su placer[1].
   De acuerdo con Ávila, como corolario de esta exposición, Brousseau afirma que los supuestos en los que descansan muchos de los contratos antes expuestos, no son sino ficciones, producto de las creencias que comparten profesores y padres de familia. Señala además el carácter insuficiente de cada uno de ellos para construir a la vez: a) un saber canónico; b) los conocimientos que le acompañan y c) las prácticas que caracterizan su puesta en operación. El equilibrio, en su perspectiva, se logra mediante contratos en que el profesor asume mayores responsabilidades, como serían los basados en la *transformación de saberes previos*.
7) Los *contratos basados sobre la transformación de saberes previos*. En estos contratos se acepta una epistemología según la cual los aprendizajes se dan por acomodación; se acepta también la existencia de obstáculos (epistemológicos) y la necesidad

[1] Recuérdese que en la teoría de las situaciones didácticas, la interacción del alumno con el medio es modelada a partir de la teoría de los juegos (comunicación personal de Alicia Ávila, agosto de 2006).

de conocimientos previos en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Conforme a estos contratos, la génesis didáctica de los saberes procede por modificaciones y por rupturas a la manera de una génesis histórica y no de manera lineal por simple acumulación. En estos contratos, además, el estado del saber se modifica debido a que:

- Los saberes enseñados se transforman en medios de decisión ante una situación, es decir, en conocimientos.
- Inversamente, los conocimientos desarrollados en interacción con las situaciones, se transforman luego en saberes institucionales, organizados de manera canónica.

Es un contrato de este tipo el que sirve de telón de fondo a la teoría de las situaciones didácticas, conforme a la cual se busca que sea el sujeto epistémico (que actúa por exigencias de la situación, con base en razones intelectuales) el que prive por sobre el sujeto didáctico (que actúa conforme a presiones del profesor, por razones didácticas).

De acuerdo con Ávila (2001a), el rol del profesor es entonces gestionar regulaciones no sólo intra-contratos sino también intercontratos. Para Brousseau (2000), las intervenciones didácticas son regulaciones destinadas a mantener equilibrios, más que a producir directamente efectos, y esas regulaciones son específicas de la noción matemática.

Ávila (2001a) afirma que probablemente la vertiente más conocida de la teoría de las situaciones sea la que Brousseau construyó con un ánimo experimental: el análisis de las condiciones en las cuales se produce el conocimiento, lo que lo llevaría a centrarse en el estudio del *medio* promotor de adaptaciones. La autora agrega que la sensibilidad antropológica está presente en los trabajos de Brousseau.

En palabras de Ávila, en efecto, la noción de contrato didáctico otorga la posibilidad de ver, más allá de la situación y la acción del sujeto cognoscente que provoca, lo que ocurre en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en tanto que proceso situado en el ámbito de las exigencias de la institución escolar. Con el desarrollo de la noción de contrato y su vinculación con la enseñanza, así como con las nociones de regulación y memoria didáctica, la teoría de situaciones cierra el paréntesis que abriera en sus inicios sobre la acción del profesor.

2.7 Epistemología de los profesores

En cuanto a la epistemología de los profesores, Brousseau (2000) destaca en un primer momento la cuestión de si las instituciones de enseñanza desarrollan por necesidad profesional, conocimientos originales relativos a la adquisición de los conocimientos, a su papel o a su estatuto. El profesor está por lo tanto obligado a practicar y a profesar un modelo de pensamiento "oficial", calcado de aquello que la cultura declara inteligible y expresable, con la única tolerancia que ofrece la transposición didáctica. El término "epistemología" abarca un campo más amplio que la concepción de la génesis y del sentido de los saberes, aunque esta es la parte más importante para las relaciones del enseñante con la sociedad. Existen "creencias" epistemológicas de origen cultural, histórico, científico y más. Éstas tienen una función, una justificación. Pueden ser correctas o falsas, y adaptadas o inadaptadas. Aquello que facilita la relación didáctica "local" no siempre queda sin consecuencias posteriores. La forma en que un profesor específico piensa que puede producir una génesis didáctica de los saberes que quiere enseñar en su clase, debe estar controlada por un repertorio de conocimientos explícitos o implícitos de naturaleza epistemológica. Brousseau, en su análisis acerca de la epistemología de los profesores, considera que ésta es a la vez su medio de:

- *Lectura* de las matemáticas
- Concebirlas como conocimientos proyectados para los alumnos
- Interpretar los comportamientos de los alumnos como distanciamientos con respecto a esta norma.
- Concebir una intervención.

La función cognitiva de los profesores es la de integrar estos cuatro objetos en uno solo. Es por esta razón que es considerada por los profesores como la "verdadera" verdad de las matemáticas, de la enseñanza y de los alumnos (Brousseau, 2000).

Por último, para cerrar este capítulo, se ha presentado una de las teorías que debido a su importancia en la explicación del proceso global de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es una de las que actualmente se reportan como más útiles para indagar lo que ocurre en las clases de matemáticas, utilizada a nivel nacional e internacional (Ávila *et al*, 2003; Lagrange *et al*, 2003). Teoría en la que uno de los elementos a considerar para el análisis de dicho proceso es la forma como ocurre el contrato didáctico dentro del aula, en las prácticas educativas durante la enseñanza y el aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.

De este modo, en el siguiente capítulo, con relación a lo que ocurre en las prácticas escolares dentro del aula, se presenta la teoría que fundamenta la importancia del estudio del pensamiento docente y de las concepciones de los maestros.

CAPÍTULO 3

Las concepciones del docente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

El objetivo central de esta investigación es analizar y describir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente con relación al tipo de aprendizaje que tienen los niños de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos. En la comprensión de este proceso se considera relevante explorar y analizar la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje por parte de los profesores, y el modo en que ocurre su instrucción en las prácticas educativas reales.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje, el maestro resulta ser uno de los elementos clave para la transmisión, promoción o construcción de estos conocimientos matemáticos. Sin embargo, la instrucción del profesor puede ser influida por una serie de aspectos, como son su conocimiento, sus estrategias (Díaz-Barriga y Hernández, 2003; Vermunt y Verloop, 1999), sus creencias (Gill, Ashton, y Algina, 2004; Hofer y Pintrich, 1997), y sus concepciones específicas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Thompson, 1992). Sin embargo, es preciso destacar las dificultades que han tenido los investigadores para acordar las diferencias o relaciones conceptuales principalmente entre la epistemología, las creencias y las concepciones, (Monroy y Díaz, 2004; Kane, Sandretto y Heath, 2002; Pepin, 1999) no obstante es necesario ajustar la definición del término tratando de expandirla y justificarla teóricamente (McLeod y McLeod, 2002).

En este sentido, en la última parte de este capítulo se hace una reseña de algunos trabajos relacionados con las concepciones de los maestros, de interés para esta investigación. Asimismo, para fines de esta investigación se retoma la definición propuesta por Thompson (1992): "concepciones de los maestros, vistas más como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, normas, imágenes mentales, preferencias y parecidos. Entonces, la distinción puede no ser tan importante, esto podría ser más natural al referirse a las concepciones de los maestros de matemáticas, más como una disciplina que como un simple diálogo de las creencias de los maestros sobre las matemáticas" (p. 130).

En diversos estudios se define y justifica teóricamente la importancia del estudio de las concepciones de los maestros; en Monroy (1998), el estudio del pensamiento docente comprende seis categorías, exploradas en una serie de entrevistas, que para fines de esta investigación se adaptaron como:

- Formación previa e interés en la didáctica específica de la disciplina (en nuestro caso, de las matemáticas)
- Enseñanza de las matemáticas.
- Aprendizaje y motivación de los alumnos
- Contenidos y aprendizajes específicos con relación a la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.
- Métodos y estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos.
- Evaluación del aprendizaje de las matemáticas.

Para ilustrar el entendimiento y análisis de las concepciones de una maestra y un maestro, acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de primero y segundo grado de educación primaria, a continuación se ofrece en este apartado la definición conceptual de epistemología, una descripción breve de algunos de los trabajos principales acerca de las creencias epistemológicas, para continuar con las creencias epistemológicas en matemáticas, y cerrar con concepciones acerca de las matemáticas. Todo ello, con la finalidad de poder diferenciar e integrar los marcos teóricos referidos a las concepciones y las creencias epistemológicas.

3.1 La epistemología y creencias epistemológicas

Muis (2004) concibe a la epistemología como un brazo de la filosofía relacionado con la naturaleza del conocimiento y la justificación de las creencias. En tal sentido, cita la siguiente definición derivada de la noción más filosófica de la epistemología (*The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Audi, 1999, cit. en Muis): "el estudio de la naturaleza y justificación del conocimiento: específicamente, el estudio de a) las características definidas, b) las condiciones sustantivas u orígenes, y c) los límites del conocimiento y la justificación" (p. 273). Por su parte, Royce *et al* (1978), consideran que un examen de la epistemología personal incluye la exploración de la naturaleza del conocimiento, justificación del conocimiento, orígenes del conocimiento y aspectos del desarrollo de la adquisición del conocimiento.

Hofer (2002) expone que como interpretación filosófica, la epistemología está relacionada con el origen, naturaleza, método y justificación del conocimiento humano. El término epistemología "por contraste, relaciona al conocimiento más generalmente y por sus condiciones para adquirirlo. Desde una perspectiva psicológica y educacional, el centro del estudio epistemológico personal o cognición epistémica es cómo el individuo desarrolla concepciones de conocimiento y conoce el mundo. Esto incluye creencias sobre la definición de conocimiento y cómo el conocimiento se adquiere, se evalúa, dónde reside y cómo ocurre" (p. 4).

De acuerdo con Hofer y Pintrich (1997), los psicólogos educativos han incrementado su interés en el desarrollo de la epistemología personal y las creencias epistemológicas; es decir, en dilucidar cómo los individuos adquieren el conocimiento, las teorías y creencias que sostienen sobre el conocimiento y cómo estas creencias son parte e influyen en los procesos cognitivos, específicamente del pensamiento y del razonamiento. Schommer (1990), en su conceptualización de las creencias epistemológicas, las define como las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza del conocimiento y el aprendizaje. Considera que los individuos tienen un sistema inconsciente de creencias sobre lo que conocen y cómo este conocimiento es adquirido. Además, esas creencias tienen efectos sutiles y aun importantes sobre cómo los individuos comprenden, monitorean su comprensión, solucionan problemas y persisten al enfrentar los desafíos de las tareas. Sin embargo, así como cada creencia afecta el razonamiento, el aprendizaje y la toma de decisiones tienen directa e indirectamente efectos sobre el aprendizaje. Además, las creencias afectan las conductas de los estudiantes.

De acuerdo con Hofer (2002), a partir de una perspectiva evolutiva pueden identificarse dos piedras angulares en la investigación sobre la epistemología personal: la epistemología genética de Piaget en el niño y el trabajo de Perry (1981) sobre el desarrollo epistemológico de los estudiantes universitarios. Piaget creyó que el desarrollo de la inteligencia es un aspecto del desarrollo biológico, caracterizado por los procesos de asimilación y acomodación. Igualmente, consideró que la adquisición del conocimiento es un proceso más bien activo que pasivo, y que conocer significa transformar la realidad para entender cómo se produce un cierto estado. La posición piagetiana sobre la epistemología ha influido a varios investigadores, cuyos modelos reflejan una secuencia de desarrollo evolutivo.

En este sentido, desde una explicación evolutiva, y enmarcado en el campo del desarrollo de las creencias epistemológicas, Perry (1981) se interesó en 1968 por las diferencias en las respuestas de los estudiantes sobre la diversidad intelectual y los ambientes sociales de las universidades. Basado en dos décadas de entrevistas conducidas con estudiantes de la Universidad de Harvard, predominantemente masculinos, Perry propuso que los estudiantes progresan de modo serial sobre nueve posiciones intelectuales y éticas. En los estados tempranos, los estudiantes ven el conocimiento como algo bueno o malo y creen que la figura de la autoridad tiene todas las respuestas.

Después de ser expuestos a varios modelos y paradigmas conflictivos, los estudiantes pueden llegar a concluir que un punto de vista puede ser tan malo como bueno. Así, se plantea que progresan a través de niveles altos de educación y llegan a percibir el conocimiento como relativamente correcto sobre varios contextos. Finalmente, cerca de la conclusión de sus carreras universitarias, los estudiantes llegan a darse cuenta de que hay múltiples posibilidades para conocer, y que este es el momento cuando pueden comprometerse con algunas ideas.

En esta línea de investigación de las creencias, otros trabajos se desarrollaron con base en el trabajo de Perry; tal es el caso de Belenky, Clinchy, Goldberger y Tarule (1986) acerca de las formas de conocer de las mujeres y de cómo este conocimiento se desarrolla a lo largo del tiempo. Otro modelo de epistemología personal que se centra en el desarrollo intelectual es el de Kitchener y King (1981). Su modelo del juicio reflexivo incluye siete estados de las creencias sobre el conocimiento y la realidad.

En contraste a una aproximación de desarrollo evolutivo, Schommer (1990) elaboró un modelo de epistemología personal que intenta capturar la multidimensionalidad de las creencias epistemológicas. La autora argumenta que las creencias epistemológicas representan un sistema multidimensional de creencias más o menos independientes. En tal sentido, sugiere que el desarrollo de las creencias epistemológicas puede ser recursivo, y que el desarrollo y cambio son influidos por nuestras experiencias. Estas experiencias incluyen las de la educación formal (ejemplo: involucrarse en el aprendizaje y solución de problemas, la influencia del maestro, la influencia de los compañeros) y la experiencia de la vida cotidiana (ambiente del hogar).

Gil (1993) postula la existencia de la denominada "docencia del sentido común" que se caracteriza por una serie de creencias inadecuadas respecto a los alumnos y la enseñanza (i. e. los alumnos aprenden en función del nivel socioeconómico al que pertenecen, los alumnos motivados por aprender lo están debido a su familia, enseñar es fácil o cuestión del sentido común, la inteligencia y las habilidades son fijas y no pueden modificarse con la instrucción, etcétera).

Lo anterior contribuye a justificar la importancia de realizar estudios que analicen las creencias de los maestros, como modelos conceptuales inmersos en sus propias concepciones específicas de dominio, en este caso el de las matemáticas.

3.2 Creencias epistemológicas en matemáticas

En el área de las creencias epistemológicas en matemáticas, Muis (2004) realizó una revisión y análisis crítico (meta-análisis) de 33 estudios sobre las creencias epistemológicas de los estudiantes acerca de las matemáticas.

Identificó cinco categorías principales: creencias sobre las matemáticas, desarrollo de las creencias, efectos de las creencias sobre la conducta, diferentes dominios y cambio de las creencias. Los estudios que examinaron las creencias sobre las matemáticas revelaron patrones consistentes en la influencia de las creencias en todos los niveles educativos. Los ambientes instruccionales en matemáticas influían el desarrollo de las creencias sobre las matemáticas. Todos los estudios revelaron relaciones significativas entre las creencias y cognición, motivación y rendimiento académico. Los trabajos descriptivos encontraron relaciones entre creencias y conductas de aprendizaje. Los estudios que examinaron diferentes dominios encontraron variaciones significativas en las creencias a través de las disciplinas. Los que se centraron sobre el cambio de las creencias fueron exitosos, y dichos cambios fueron atribuidos a los cambios apropiados en el estilo instruccional, cuando menos en este meta-análisis.

De esta forma, en el estudio meta-analítico de Muis (2004) resultaron de interés los resultados relacionados con la categoría de los efectos de las creencias epistemológicas sobre la conducta y el cambio de las creencias epistemológicas. Adicionalmente, en su revisión, este autor describe que desde 1960, la investigación epistemológica se ha centrado sobre cómo las creencias de los estudiantes maduran con el tiempo. En los inicios de los ochenta y adentrándose a los noventa, la investigación llegó a centrarse específicamente en cómo estas creencias median la conducta de los estudiantes, y precisamente cómo las creencias de los estudiantes median factores cognitivos y motivacionales que subrayan el aprendizaje y su rendimiento.

Dentro de los resultados, se examinó el impacto de las creencias de los estudiantes sobre su conducta, donde revelan relaciones significativas entre las creencias y sobre cómo los estudiantes se involucran en el aprendizaje y el rendimiento académico.

En cuanto a la metodología empleada en los diversos trabajos, se encontró que los estudios orientados cualitativamente han mostrado que las creencias de los estudiantes parecen influir en su aprendizaje con respecto a la cantidad de tiempo que emplean para trabajar sobre un problema, a las estrategias que utilizan para solucionar un problema y a sus justificaciones que constituyen una respuesta correcta.

En tanto, los estudios con orientación cuantitativa se han apoyado en las medidas del auto-reporte para evaluar las estrategias que los estudiantes utilizan, sus orientaciones motivacionales y su confianza para tener éxito en una tarea. Estos estudios también encuentran relaciones significativas entre las creencias de los estudiantes y los tipos de conductas mientras aprenden y en cómo estas conductas se relacionan con su rendimiento. El foco central ha sido sobre cómo las conductas de aprendizaje pueden mediar las creencias y el rendimiento.

Por otra parte, la mayoría de los estudios que han examinado diferentes dominios en las creencias encontraron respaldo para la hipótesis del dominio específico como factor relevante; esto es, las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza del conocimiento y el aprendizaje fueron diferentes a través de los diferentes dominios y niveles de la educación. Muis refiere que si las creencias son multidimensionales, se puede argumentar que ciertas dimensiones en los estudiantes pueden ser similares al inicio de su educación universitaria, y las diferencias se acentúan a medida que aumentan su pericia en dominios específicos, y por ello pueden no ser iguales o estables.

Lo anterior es consistente con los trabajos de Perry (1981) acerca de la evolución del pensamiento, del cambio de las creencias afectadas por la instrucción o por la experiencia de la vida diaria propuesta por Schommer (1990) y Gill *et al* (2004), así como la existencia de creencias más o menos independientes, pero que de alguna forma se encuentran interrelacionadas (Schommer, 1990).

Con respecto al dominio del cambio de las creencias epistemológicas, resulta de interés central tratar de acercarse, mediante una propuesta de intervención, al cambio de las creencias de los profesores y posibilitar la mejora de la enseñanza.

En la literatura sobre el cambio de las creencias, existen numerosos argumentos que se han hecho acerca de cómo los investigadores deberían aproximarse a este objeto de estudio y cómo evaluar las condiciones requeridas para poder lograrlo. Por ejemplo, Posner, Strike, Hewson y Gerzog (1982) proponen que la investigación sobre el tema puede proveer algo de percepción dentro de las condiciones necesarias para el cambio de las creencias. El modelo que proponen estos autores se basa en cuatro condiciones señaladas para que esto ocurra. En la primera condición, los individuos deben estar insatisfechos con las actuales concepciones. Segundo, las nuevas concepciones deben ser inteligibles; esto es, los individuos deben ser capaces de entender las nuevas creencias. Tercero, las nuevas concepciones deben ser plausibles, de tal manera que los individuos sean capaces de aplicar adecuadamente las nuevas creencias. Finalmente, las nuevas concepciones deben servir para la investigación futura.

Una de las investigaciones analizadas en el dominio del cambio de las creencias, es la de Erickson (1993), quien examinó el impacto de un proyecto diseñado para asistir a maestros en la implementación del nuevo curriculum y los Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares (NCTM, 1989) y los Estándares Profesionales para las Matemáticas Escolares (NCTM, 1991), en Estados Unidos. Uno de los principales y nuevos estándares para las matemáticas fue que los maestros centraran más su instrucción en el entendimiento conceptual que sobre las técnicas de cómputo eficientes. Una de las recomendaciones para los maestros fue implementar en el salón un ambiente con orientación constructivista. Los maestros fueron guiados en el desarrollo de un ambiente de aula centrado en proveer problemas relevantes e interesantes, y utilizando herramientas y técnicas modernas en las matemáticas escolares. Los maestros también fueron guiados para cambiar el centro de las actividades, al proveer a los estudiantes de oportunidades para explorar, trabajar en pequeños grupos y enfatizar el entendimiento de los conceptos más que el cómputo.

En esa misma investigación de Erickson, se indagó la visión de dos maestros ("A" y "B") de educación media, acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus percepciones acerca del propósito de la educación, así como su transformación dentro de la planificación para la instrucción y la enseñanza. Se aplicó al inicio y final del estudio un cuestionario que reflejara sus definiciones de las matemáticas, los tópicos que enseñan en sus clases y sus puntos de vista de la educación escolar pública. Los maestros también participaron en entrevistas pre y post-intervención para discutir sus metas del año escolar y cómo fueron logrando esas metas. En la segunda entrevista, los maestros elaboraron sus definiciones de las matemáticas y puntos de vista acerca de los propósitos de la educación. También se examinaron los planes de las lecciones de los maestros, un portafolio de los materiales más que los materiales de texto y videotapes de las lecciones.

Erickson (1993) concluyó que las creencias y el rendimiento de los estudiantes del maestro "A", así como sus clases, no cambiaron significativamente debido al ambiente del aula. Éste continuó siendo el más tradicional, donde el papel del maestro fue de proveedor de conocimiento más que de promotor o mediador de la construcción del conocimiento. En comparación, las creencias y el rendimiento de los estudiantes de las clases sí cambiaron en el caso del maestro "B", donde Erickson argumentó que esto fue el resultado del ambiente del aula y de las actividades con una orientación constructivista.

En resumen, en este capítulo acerca del cambio de las creencias, Muis (2004) refiere que muchos estudios examinaron si las creencias de los estudiantes pueden cambiar como resultado de cambios específicos en la instrucción del salón de clases, donde se han encontrado cambios positivos. Estos estudios proveen evidencia de que las creencias de los estudiantes son maleables, y que este cambio puede ocurrir al modificar los métodos por los cuales los estudiantes se involucran en el aprendizaje. Sin embargo, Martínez Fernández (2004) no encuentra que la percepción de los estudiantes acerca de la docencia sea una variable relevante en la explicación del cambio conceptual.

En su tesis doctoral, a detalle Martínez Fernández encontró que los aspectos emocionales son importantes en el pensamiento del estudiante (más motivados y si perciben la docencia como desafío e innovación); sin embargo, en su análisis de otros estudios considera que ni esa motivación, ni esa percepción de la docencia explican el cambio conceptual. Considera que la gente cambia cuando

dispone de información (a mayor nivel de estudios, más favorable) y particularmente la explicativa en su trabajo es la meta-cognición. Es decir, si una persona es meta-cognitivamente hábil, el cambio es posible y factible, si además esa persona esta intrínsecamente motivada y percibe la docencia como innovación y desafío, es mejor. En otro caso, si la persona percibe la docencia como desafío y está intrínsecamente motivada, y en los últimos casos con alta pericia pero no es meta-cognitivamente hábil, el cambio se dificulta.

Los resultados de esta línea de investigación (Muis, 2004) sugieren que el corazón del desarrollo de las creencias epistemológicas reside en el contexto del aula en que los estudiantes aprenden. Sin embargo, los tipos de instrucción en los cuales los estudiantes están inmersos son paralelos a los tipos de creencias que éstos tienen. La enseñanza que se centra sobre la velocidad, la precisión y la memorización de reglas y los procedimientos centrados en las presentaciones del maestro y la práctica aislada, están asociados con las creencias de que el aprendizaje es rápido, donde hay únicamente una respuesta cierta, el éxito requiere habilidad innata, el conocimiento matemático es inmodificable y consiste de piezas aisladas de información, y el maestro es el origen por el cual se justifica el conocimiento matemático. En contraste, la aproximación orientada al constructivismo (Díaz-Barriga, 2005) centra la enseñanza sobre contextos significativos y auténticos, involucra a los estudiantes en actividades de grupo y de colaboración para construir el conocimiento matemático, son procesos orientados y proveen tiempo para que los estudiantes aprendan. Estos tipos de diseño instruccional están asociados con las creencias de que las matemáticas son una forma de pensamiento, que el conocimiento matemático está relacionado con otras disciplinas y otras facetas de la vida, que se aprende con el tiempo y con esfuerzo, que no es innato, que puede ser construido individual y colaborativamente, más que recibido pasivamente de la autoridad representada por el maestro. De este modo, específicamente en el caso de los maestros, la influencia de las creencias es importante. Se ha encontrado que afectan su práctica educativa y pueden ser el reflejo de una postura inadecuada de cómo deben enseñarse las matemáticas (Gill *et al*, 2004).

En síntesis, a partir de los estudios citados, es importante reconocer que la epistemología tiene como finalidad el estudio del origen, naturaleza y justificación del conocimiento (Hofer, 2002;

Royce, 1978). Así, se destaca la importancia de entender a las creencias epistemológicas como las creencias que se tienen acerca de la naturaleza del conocimiento y aprendizaje (Schommer, 1990), y cómo estas creencias influyen los procesos cognitivos, en particular la razón y el pensamiento de los individuos (Hofer y Pintrich, 1997).

El estudio de las creencias epistemológicas sobre las matemáticas revela sus efectos en la conducta de los alumnos, la posibilidad del cambio de las creencias y la existencia de creencias independientes para cada dominio o materia, entre otros puntos importantes (Muis, 2004).

En cuanto al meta-análisis de Muis (2004) y otros estudios presentados, se observa que las creencias en el campo de las matemáticas pueden afectar el aprendizaje de los estudiantes y las prácticas educativas de los maestros (Gill *et al*, 2004), como fue el caso presentado por Erickson (1993), donde una enseñanza centrada en el constructivismo puede favorecer más el aprendizaje conceptual en los alumnos, que la enseñanza centrada en la práctica tradicional y en técnicas de cómputo de los algoritmos, aunque no todos los autores reportan el papel relevante de la estrategia instruccional.

3.3 Estudio de las concepciones de los maestros

Los hallazgos de la investigación de las creencias de los maestros en la educación primaria y secundaria parecen tener consenso sobre varios aspectos (Kane, Sandretto y Heath, 2002):

- Los estudiantes entran a los programas educativos del maestro con creencias preexistentes basadas en su experiencia como estudiantes.
- Estas creencias son robustas y resistentes al cambio
- Las creencias actúan como filtros permitiendo o filtrando la entrada de nuevo conocimiento que es considerado compatible o incompatible con creencias actuales.
- Las creencias existen implícitamente y son difíciles de articular.

Basado en el concepto de sistema de creencias, Green (1971, cit. en Thompson, 1992) identificó tres dimensiones de los sistemas de creencias. La primera de estas dimensiones es que una creencia jamás es sostenida con total independencia de las demás, y que esas mismas creencias están relacionadas a otras de la misma forma en que las razones están relacionadas a las conclusiones.

La segunda dimensión está relacionada al grado de convicción con el que las creencias son sostenidas desde un punto de vista psicológico. De acuerdo a Green las creencias en el sistema pueden ser vistas como centrales o periféricas, las centrales pueden ser creencias sostenidas fuertemente, y las periféricas son más susceptibles al cambio o a la revisión.

La tercera dimensión de Green está relacionada con la convicción de que "las creencias son sostenidas en *racimos* o agrupamientos, más o menos aislados de otros *racimos* y protegidas de cualquier relación con otro conjunto de creencias" (p. 48).

En adición, originalmente Thompson, al aludir a la noción de sistema de creencias, se refiere a las "concepciones de los maestros, vistas más como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, normas, imágenes mentales, preferencias y parecidos. Entonces, la distinción puede no ser tan importante, esto puede ser más natural al referirse a las concepciones de los maestros acerca de las matemáticas más como una disciplina que como un simple diálogo de las creencias de los maestros sobre las matemáticas" (Thompson, 1992, p. 130).

No obstante a la revisión teórica que realizan, algunos autores (Kane *et al*, 2002; Thompson, 1992; y Pepin, 1999) reportan que la literatura sobre el conocimiento y las creencias de los maestros desde los niveles primaria y secundaria han desarrollado un número diferente de términos. Al respecto, Kane nota el problema de que términos como cognición del maestro, auto-reflexión, conocimiento y creencia, cada uno puede ser utilizado para referirse a un fenómeno diferente. La variación en la definición de un término puede extenderse desde lo superficial y lo idiosincrásico a lo profundo y teórico.

Por su parte, Monroy y Díaz (2004) destacan que el pensamiento pedagógico del docente es un marco de referencia que integra un conjunto de teorías implícitas, creencias, expectativas, nociones y valores mediante los cuales el profesor significa, interpreta, decide y actúa en sus actividades educativas. Este conjunto de representaciones pedagógicas ha sido reconstruido personalmente sobre la base de conocimientos pedagógicos históricamente elaborados (pedagogías tradicionales, conductuales, activas, operatorias, constructivas, críticas) y apropiados por medio de la formación docente y de la propia práctica. Las teorías implícitas (reconstrucciones personales) no sólo son un sistema cognitivo como dispositivo epistémico de interpretación de la realidad, sino también como un sistema referente de planificación y de control de la acción; no se reducen por lo tanto a un mero ejercicio intelectual, sino son parte de la actividad vital para interactuar con el medio.

Este tipo de estudios sobre las representaciones, creencias, expectativas y valores de los docentes ha tenido una orientación hacia la investigación educativa, pero también es una metodología utilizada para reflexionar sobre el pensamiento pedagógico de los profesores, con la intención de evaluar las representaciones de sus actividades académicas. El análisis de las teorías y creencias docentes es una alternativa para pensar cómo conciben ellos el pensamiento pedagógico en diferentes momentos de su quehacer educativo. Antes de iniciar las actividades docentes, el análisis del pensamiento docente brinda información acerca de la manera como el profesor se representa la práctica educativa que ejercerá con sus alumnos. Durante la acción educativa, la evaluación del pensamiento pedagógico del profesor proporciona datos sobre cómo y con base en qué elabora juicios y toma decisiones durante su intervención en los procesos de enseñanza y aprendizaje; cuando el profesor culmina una etapa del trabajo, permite observar cómo percibe la experiencia de su actividad, qué habrá de cambiar, qué habrá de desechar o enriquecer para que en futuras actuaciones educativas se prevean resultados más afortunados.

En este sentido, indagar el pensamiento docente puede ser un mecanismo para evaluar a los profesores antes, durante o después de su intervención en las prácticas educativas. De este modo, se perfila como una metodología que se dirige en forma específica a cómo mejorar la planeación docente, la interacción en el aula, y de qué manera mejorar la actividad en futuras realizaciones. Además, es una metodología de evaluación docente que toma en cuenta motivos y significaciones de los profesores. Por otra parte, dentro de los elementos históricos se destaca que la psicología cognitiva, concretamente el enfoque del procesamiento de la información, desarrolló algunos de los primeros trabajos sobre el pensamiento del profesor (Monroy y Díaz, 2004).

De acuerdo con Monroy, uno de los aspectos cruciales para ubicar la evaluación de la docencia por medio de la reflexión sobre las teorías y creencias del docente, consiste en concebirlo como un práctico reflexivo (Schön, 1994). El practicante reflexivo, dice Schön, necesita reflexionar críticamente sobre el significado de su pensamiento y acciones como un camino para mejorar su práctica profesional; si ésta tiene que cambiar, los docentes necesitan evaluar algunas de sus creencias fundamentales para alejarse del "siempre me ha funcionado" o del "no tengo que cambiar".

Una de las premisas fundamentales de este enfoque es que el docente es un sujeto que reflexiona, emite juicios, toma decisiones e imprime un sentido a su práctica educativa de acuerdo con sus teorías implícitas, creencias y valores. Es importante reflexionar (evaluar) sobre el papel determinante que desempeña el cúmulo de representaciones y de elementos que articulan su práctica: su concepción de lo que es la enseñanza, sus creencias sobre métodos de enseñanza y aprendizaje más pertinentes, sus teorías sobre cuándo considera que sus alumnos ya aprendieron, sus actitudes y valores que han construido acerca de lo que es su papel como docente, entre otros aspectos educativos, ya que se suele considerar que un resultado "positivo y pertinente" de los procesos de enseñanza y aprendizaje depende, en una medida considerable, de la manera en la que el docente ejerce, concibe, planifica, ejecuta y reconsidera su actividad (Clark y Peterson, 1990, cit. en Monroy y Díaz, 2004).

Otra premisa fundamental de los estudios sobre el pensamiento docente es que abre la posibilidad de considerar las teorías como precursoras, reguladoras o antecedentes de la acción y como apoyo para la evaluación. Si se pretende mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, es preciso que los docentes reflexionen sobre qué teorías, creencias y valores preceden a la práctica educativa. Es más probable prever su comportamiento si se conocen sus modelos de representación pedagógica. Basados en sus análisis, Monroy y Díaz (2004) describen que al término de las acciones educativas, la reflexión sobre las prácticas educativas realizadas permite hacer explícitas las teorías pedagógicas y da oportunidad para replantear los valores educativos.

Los estudios sobre el pensamiento docente no desconocen las frecuentes contradicciones entre lo que se piensa y se hace. Los autores sintetizan: el cambio conceptual no es suficiente, aunque es necesario para producir una práctica mejor. El análisis conceptual se verá enriquecido si se acompaña con estudios sobre cómo se hace posible el pensamiento en la práctica. Un ejemplo de ello es el uso de portafolios del docente, en el que, además de observar el cambio conceptual, también se constata la producción docente.

Por otra parte, basados en el análisis de Monroy y Díaz en cuanto a los estudios sobre el pensamiento docente, el análisis de las teorías y las creencias de los docentes ha sido abordado desde diferentes ángulos y perspectivas. Rodrigo, Rodríguez y Marrero (1993) mencionan que las personas construyen sus teorías sobre la realidad a partir de experiencias personales, obtenidas en los episodios de contacto con prácticas y formatos de interacción social. Los autores realizan un análisis de las síntesis de conocimiento pedagógico (conductual, activa, crítica, constructivista, entre otras), y posteriormente un análisis de la síntesis de creencias. De una manera simple, se podría decir que los profesores tienen mucha información de teorías pedagógicas alternativas que son capaces de conocer y discriminar, pero sólo creen en alguna de ellas, y son las que asumen como propias. El estudio también da cuenta de la relación que guardan las teorías implícitas de los profesores con las prácticas pedagógicas, específicamente en la planeación de la enseñanza.

Otra experiencia importante sobre el pensamiento docente y la planeación educativa se encuentra en Taylor (1984) y Tillema (1970), (citados en Monroy y Díaz, 2004). Taylor observó que los profesores, cuando planificaban, no seguían de manera lineal el esquema de Tyler (en donde los objetivos de enseñanza son la primera preocupación); su principal inquietud se centró en los intereses y las actitudes de los alumnos y en el contenido que se va a enseñar. Por su parte, Tillema concluyó que los docentes basaban su planeación en el diagnóstico que realizaban sobre el conocimiento previo que tenían los alumnos. En ambos estudios, los profesores no necesariamente iniciaban planificando en función de los objetivos de la enseñanza. Se destaca la afirmación de que si las instituciones quieren modificar los programas de estudio, los modos de enseñanza y aprendizaje, así como los mecanismos de evaluación, no habrá que pasar por alto el pensamiento del profesor.

Peterson, Marx y Clark (1978) ofrecen resultados sobre las concepciones prácticas de los profesores; descubrieron que éstos hacen hincapié en unos aspectos más que en otros, de acuerdo con las concepciones que poseen. Así, por ejemplo, extienden el tiempo en ciertos temas, y otros, en cambio quedan reducidos o incluso suprimidos. Borko, Shavelson y Stern (1981) advirtieron que los profesores con creencias tradicionales más fuertes concedían menos responsabilidad a los alumnos, en contraste con los que tenían creencias progresistas, quienes juzgaban más importantes los objetivos de competencia social y desarrollo emocional. Los profesores con creencias tradicionales fuertes, por ejemplo, pasan más tiempo corrigiendo as-

pectos de orden y de disciplina que enseñando. Por otra parte, Good (1983) analizó tipos de expectativas de los docentes y las maneras como se forman y comunican en el salón de clases. Uno de los resultados más interesantes permite entender cómo algunos alumnos tienen más oportunidades para pensar, responder y ser comprendidos, en función de las expectativas positivas que maneja el docente.

En esta misma dirección de investigación, Coll y Miras (1993) comprobaron que los profesores con mayores expectativas de rendimiento de sus alumnos pueden llegar a afectar significativamente el rendimiento efectivo de los mismos. Por el contrario, cuando los resultados de los alumnos no concuerdan con las expectativas de los docentes, se estima que esa no es la realidad.

Monroy (1998) presentó resultados sobre el pensamiento didáctico de profesores de Historia en educación media superior. En síntesis, los resultados permitieron conocer que los docentes dedican poca o nula ayuda a los estudiantes en su aprendizaje, más bien centran su actividad en la enseñanza. Con poca frecuencia se observan representaciones en donde ellos, como expertos de la docencia, ofrezcan apoyo para producir una aproximación entre lo que intentan que construyan los alumnos y los significados que representan los contenidos escolares que enseñan. Una última crítica que Monroy y Díaz (2004) hacen a los estudios del pensamiento docente es que no se da necesariamente una relación lineal ni una congruencia entre lo que se piensa y lo que se actúa, misma afirmación que se encuentra en el trabajo de Kane, Sandretto y Heath (2002) sobre la discrepancia entre las creencias de la enseñanza y la práctica educativa de los maestros. La inquietud por unir lo normativo y factual, lo que se dice y lo que se hace, puede enriquecer los estudios del pensamiento docente.

Por su parte Martínez y Gorgorió (2004) en un estudio acerca de las concepciones de los profesores sobre la resta, entienden las concepciones como el conjunto de representaciones internas evocadas por un concepto. Son las organizadoras implícitas de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva. Describen la naturaleza de los objetos matemáticos y las diferentes imágenes de estos en la mentes, ya sean simbólicos, gráficos, etcétera.

Para Martínez y Gorgorió las concepciones no sólo hacen referencia a la naturaleza de las matemáticas y de los objetos de las matemáticas, sino también hay concepciones relacionadas con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Para los objetivos de su trabajo, estos autores entendieron por concepciones sobre la enseñanza de la resta, los pensamientos asumidos por los profesores en relación con los fines, objetivos y contenidos de aprendizaje de la resta en la educación primaria; los roles del enseñante y el alumno; el tipo de actividad didáctica o proceso instruccional más apropiado; el papel asignado a la contextualización y la enseñanza de la resta.

En sus resultados destacan que para los profesores, la contextualización de la enseñanza de la resta debe hacerse a través del planteamiento y la resolución de problemas escritos; poner palabras claves; plantear y resolver problemas con un mismo tipo de estructura relacional; y que las dificultades de aprendizaje de las matemáticas son inherentes al alumno, resultados que en parte son similares a los de este trabajo de investigación.

Finalmente, de acuerdo con los trabajos presentados en este capítulo, destaca la utilidad y necesidad de continuar con los esfuerzos por investigar y analizar las creencias (Muis, 2004; Gill *et al*, 2004) las concepciones (Pepin, 1999) y el pensamiento docente (Monroy y Díaz, 2004), pues se considera que éstos tienen una fuerte influencia durante la instrucción escolar de los maestros, que definirá de manera importante la calidad y tipo de aprendizaje que adquieran los alumnos.

En cuanto al orden en que se presentan los trabajos sobre las creencias (Schommer, 1990), el pensamiento del profesor (Monroy y Díaz, 2004) y las concepciones (Thompson, 1992) podrían llevar a una posible confusión, debido a que el concepto y uso se enlazan muchas veces, sin embargo al sustentarse este trabajo en la definición de Thompson, se considera que las concepciones abarcan las anteriores. De ahí la importancia de presentar las principales definiciones y trabajos correspondientes.

De acuerdo con el marco anterior se concibió que durante las entrevistas realizadas en esta investigación, los maestros revelaran sus concepciones, y que en estas concepciones se incluyeran al mismo tiempo la expresión de sus creencias y de su pensamiento docente. En esta parte de la investigación se asumió que todo cuanto los maestros lograran expresar en su discurso sería considerado como *las concepciones de los maestros,* que ayudarían a contrastar su actividad en la práctica escolar real, y relacionarlo con el aprendizaje y los conocimientos que el niño sabe y adquiere acerca de los conocimientos matemáticos que se analizan en este trabajo investigativo.

CAPÍTULO

4 Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

4.1 El estado actual de la didáctica específica de las matemáticas en México

4.1.1 La década de los ochenta (1982-1992)

En esta década, de acuerdo con Waldegg *et al* (1995, coord.), el área de estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos específicos se consideraba un área de desarrollo muy reciente; de hecho, no existía como tal cuando se celebró el Primer Congreso Nacional de Investigación Educativa en 1981.

En el estado del conocimiento coordinado por Waldegg *et al* (1995), se realizó un estudio de carácter diagnóstico sobre el desarrollo alcanzado por las investigaciones de los procesos de enseñanza y aprendizaje de disciplinas específicas, centrándose en el período que va de 1982 a 1992. Se trata de una investigación de tipo documental, donde se realizó una consulta a expertos, así como la búsqueda y análisis de materiales bibliográficos y hemerográficos, colecciones de instituciones especializadas en investigación y educación, tesis de doctorado, maestría y licenciatura. El propósito de este trabajo fue mostrar los avances en la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas durante la década de los ochenta (1982-1992), tratando de incorporar, en lo posible, las publicaciones más recientes.

Dentro de sus antecedentes, la preocupación por estudiar los problemas de enseñanza de la matemática se remonta a inicios de la Escuela Normal. Ya como una disciplina autónoma, con orientación sistemática hacia la investigación, la educación matemática tiene sus orígenes en México en la década de los setenta. En 1975 se crea una maestría en Ciencias con la especialidad de Matemática Educativa, con el auspicio del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV), del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en la Sección de Matemática Educativa (SME) del Departamento de Investigaciones Educativas (DIE) del CINVESTAV.

Sin embargo, la investigación hasta ese momento se había centrado en la elaboración de textos y en la formación docente y no precisamente en la profundización del conocimiento sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza, dando inicio a esta investigación a finales de la década de los ochenta con las primeras tesis de doctorado.

Una parte importante de la actividad de la comunidad de educadores de la matemática de esa época, estaba dirigida a la elaboración de productos de desarrollo fundamentados en los resultados de la investigación. Dentro de estos productos destacan la edición de textos para maestros y alumnos, así como el diseño y desarrollo curricular. El doble proceso de diversificación y especialización en el campo de la educación matemática ha suscitado la necesidad de reflexionar acerca de la composición de este campo, las características de sus objetos de estudio y las distintas aproximaciones teóricas y metodológicas con las que éstas se abordan.

En el estado del conocimiento[1] se consideraron para el análisis de las investigaciones dos niveles. El primero corresponde al nivel escolar dentro del cual se inscribe el trabajo; en esta clasificación se determinaron tres grupos:

- Niveles básicos (preescolar, primaria y secundaria)
- Niveles medio superior y superior (secundaria en ciertos casos, preuniversitario y superior).
- Aspectos generales (trabajos en los que los niveles educativos no son determinantes y los resultados teóricos pueden ser aplicados a cualquier nivel).

Las investigaciones que caen en el primer grupo se relacionan principalmente con aspectos psicológicos, sociológicos o pedagógicos generales del fenómeno educativo. La segunda clasificación sugerida obedece a los aspectos psicológicos, sociológicos o pedagógicos que se estudian y, por la otra, a las disciplinas específicas que abordan los estudios. De esta forma, de interés especial para los niveles básicos se tiene:

- Estudios sobre el alumno
- Estudios sobre los contenidos de las matemáticas
- Estudios sobre la didáctica de las matemáticas

[1] Revisión exhaustiva a nivel nacional e internacional de trabajos e investigaciones acerca de un tema especifico, en este caso sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

- Análisis curricular
- Estudios sobre conocimientos, concepciones y prácticas del maestro.
- Estudios sobre la formación de los maestros.

A continuación se presentarán sólo aquellos que son de interés para la presente investigación.

Estudios sobre el alumno

Se reporta que la mayor parte de las investigaciones centradas en el alumno se han orientado a la exploración cualitativa de habilidades, competencias, dificultades conceptuales, errores y construcción de conceptos. Las influencias de la investigación internacional recibidas en esta área específica han sido diversas. Pueden advertirse investigaciones que retoman los marcos conceptuales construidos por los anglosajones (K. Hart, T. Kieren, Carpenter y Moser, citados por Waldegg *et al*, 1995). Esta influencia se ha dejado sentir sobre todo en los estudios relacionados con los números racionales. Paralelamente se han construido trabajos con una clara influencia francesa, en particular de Vergnaud o Escarabajal, en la investigación relacionada con las operaciones matemáticas.

Muchos investigadores buscaron ir más allá de la descripción de habilidades y competencias de los alumnos y profundizaron en el estudio sobre los procesos cognoscitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, en la década de los ochenta, algunas instituciones tales como el DIE y el DME[2] del CINVESTAV, la UPN y la DGEE, realizaron una producción considerable en investigación para explorar el desempeño y las conceptualizaciones de los estudiantes con relación a los contenidos matemáticos específicos. Los estudios realizados –con diferente nivel de profundidad y rigor– se centraron en los siguientes temas:

- Los números racionales (Ávila y Mancera, 1987 y 1989; Figueras, Filloy y Valdemoros, 1985, 1986, 1987 y 1988; Figueras, 1987 y 1988; Padilla, 1984; Valdemoros, 1993, cit. en Waldegg, 1995).
- Las operaciones aritméticas con números naturales asociadas a la resolución de problemas (Ávila, 1993; Figueras, 1991; Vargas *et al*, 1988) y sus sistemas simbólicos de representación (Nemirovsky, 1987 y 1988; Waldegg, 1995; cit. en Waldegg, 2005).

[2] Departamento de Matemática Educativa

La mayoría de estas investigaciones se caracterizaron por utilizar dos tipos de instrumentos para la obtención de los datos: pruebas de lápiz y papel y entrevistas realizadas individualmente. Son menos las que se plantean situaciones experimentales para observar el desempeño de los estudiantes. En la mayoría de estos estudios se busca identificar las estrategias y/o procedimientos de éxito o fracaso en la resolución de los problemas planteados. Hay interés preponderante por identificar el tipo y la naturaleza de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes y que constituyen obstáculos para el aprendizaje de los conceptos y las operaciones. Se resalta así la importancia del análisis de los errores, ya que éstos son entendidos como el reflejo de concepciones deficitarias o erróneas por parte de los alumnos. De acuerdo con el análisis de las investigaciones que se realizaron en este trabajo, la relevancia de los resultados radica en que se sabe que la posibilidad de ofrecer experiencias de aprendizaje adecuadas a los alumnos depende, en buena medida, del conocimiento que se tenga sobre la manera en que piensan, la dificultad de las tareas que se les plantean, el repertorio de estrategias que utilizan para enfrentarlas y los límites de su pensamiento.

Estudios sobre los contenidos de las matemáticas

Se reporta que en los años ochenta, en México hay pocos estudios realizados en esta dirección. Además de los análisis de contenido incluidos en investigaciones cuyo propósito central es de índole didáctica, sólo se identificaron algunos trabajos, todos sobre la noción de fracción.

Estudios sobre la didáctica de las matemáticas

En la década de los sesenta surgen reformas curriculares en los países europeos; esta influencia se hizo presente en México. Durante los setenta y los ochenta, la teoría psicogenética del desarrollo cognoscitivo cobró cada vez más influencia entre los profesionales de la educación dedicados al estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje, desplazando en varios países a otras teorías, como la conductista. Las relaciones establecidas entre la teoría psicogenética del desarrollo cognoscitivo y la enseñanza escolar han sido diversas y puede decirse problemáticas (Coll, 1983; cit. en Waldegg *et al*, 1995). Dicha teoría proporcionó una explicación de los procesos de construcción del conocimiento racional (teoría de la equilibración), destacó etapas básicas en la evolución de las operaciones lógicas que subyacen determinadas nociones, y con ello también revitalizó un cuestionamiento fundamental: el fracaso de los alumnos no se debe únicamente a dificultades "propias" del conocimiento matemático o a las limitaciones de los sujetos, sino a una forma de enseñanza que no responde a los procesos que siguen los alumnos para aprender. El propósito fundamental de la didáctica de las matemáticas, considerada campo de investigación, es crear explicaciones acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático en el salón de clases.

Dentro de los aportes de los trabajos más importantes citados por Waldegg *et al*, (1995) están, por un lado, las mismas secuencias didácticas para el aprendizaje de temas específicos con un enfoque constructivista, así como el análisis de procedimientos y conceptualizaciones de los niños en relación con los temas abordados y, por otro lado, las reflexiones en torno a los elementos de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau. Durante la década de los ochenta, el enfoque que postula el aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas se difundió considerablemente en México y en muchos otros países, con distintas interpretaciones. En México se identificaron sólo algunos artículos con reflexiones teóricas o reseñas relativas a este enfoque.

Análisis curricular

En esta área, de acuerdo a Waldegg *et al*, se registran pocas publicaciones cuyo objeto sea teorizar, reflexionar o analizar el currículo global de matemáticas para la educación básica y medía básica. En 1991, motivados por la reforma curricular que acompañaría al Programa de Modernización Educativa, aparecen algunos artículos sobre el tema.

Estudios sobre conocimientos, concepciones y prácticas del maestro

Esta es probablemente una de las líneas de investigación en educación matemática menos trabajada en México en los años ochenta. En el nivel internacional esta línea era poco explotada y aún no se había consolidado en paradigmas. La mayor parte de los trabajos se basan en el análisis de una o dos clases, o unos cuantos fragmentos de clase, los cuales muchas veces resultan interesantes pero de obvias limitaciones.

No existen muchos trabajos cuyas categorías de análisis alimenten de manera importante las investigaciones orientadas a comprender la naturaleza de los problemas de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, desde la perspectiva más general y amplia que implica el analizar lo que ocurre en el aula. En gran medida, Waldegg la autora fundamenta el interés de una tesis propia, que indague las prácticas del docente de matemáticas y las vincule con la adquisición de las competencias matemáticas de los alumnos en relación con contenidos curriculares específicos, como es el caso de esta investigación, centrada en las operaciones de suma, resta y solución de problemas aditivos.

Estudios sobre la formación de maestros

En general, se identifican pocos trabajos de investigación publicados sobre el tema, a pesar de ser reconocido como piedra angular en el proceso de cambio escolar. Tres reportes de investigación exploran formas de trabajo directo con maestros en servicio, dos de ellas se realizan en las escuelas mismas e incluyen análisis de las sesiones de clase. Las tres investigaciones tienen como propósito muy general incorporar distintos aportes de los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde una perspectiva constructivista.

4.1.2 La década de los noventa (1993-2001)

En continuidad al estado de conocimiento anterior y dentro del marco de trabajo del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE), se plantea la descripción de un segundo estado de conocimiento acerca de la investigación educativa en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, elaborada en la década de los noventa. Con objeto de ilustrar más los fundamentos de este marco, enseguida se presenta una síntesis del estado del conocimiento realizado por Ávila, Mancera y colaboradores (2003), acerca de las investigaciones que se consideraron importantes en el campo de las matemáticas durante el periodo 1993-2001. Es necesario mencionar que únicamente se toma la información correspondiente a la educación primaria, útil para este trabajo[3]. Un primer dato es que de acuerdo con este estudio, realizado por Ávila *et al*, (2003) la educación básica en nuestro país está totalmente influenciada por el enfoque constructivista.

[3] Al final de este capítulo se muestran evaluaciones internacionales y nacionales en estudiantes de educación básica, enfatizando los resultados de matemáticas, para mostrar las serias dificultades que se enfrentan en esta área durante la década 2000-2010.

En la organización de las investigaciones se optó por un primer nivel de clasificación que tomó como punto inicial los elementos del clásico "triángulo didáctico" (alumnos, maestros, saber), lo que dio lugar a las siguientes tres clases: investigaciones centradas en los procesos de aprendizaje de los *alumnos*, en los conocimientos de los *maestros*, o en las características específicas del *saber* enseñar. A esta categorización inicial se añadió un cuarto elemento, el de recursos (libros de texto, materiales concretos, programas de software, etcétera). Estos estudios se dividieron a su vez en dos tipos, que implicaban la interacción de los elementos mencionados: aquellos que analizan las prácticas de enseñanza, tal como ocurren en las aulas y aquellos que, como parte de su metodología, organizan programas experimentales de enseñanza. Así, se crearon dos categorías relativas a la enseñanza en el aula: *Prácticas de enseñanza y Enseñanza experimental.* Por último, se abrió una clase adicional, la educación de los adultos (Tabla 2).

De esta manera, en el trabajo original se presentan siete apartados y para cada uno de ellos se estableció un segundo nivel de clasificación, determinado por el tema específico en el que se centra la investigación. En su acercamiento cuantitativo se reporta haber revisado un total de 116 investigaciones sobre la educación preescolar y primaria. En su análisis se describe que es en la categoría del *saber* donde se registran menos estudios.

En la tabla siguiente se resume y especifica este primer nivel de clasificación.

Tabla 2. Categorías y objetos de estudio en los años noventa en educación matemática

CATEGORÍAS	OBJETOS DE ESTUDIO DE LAS INVESTIGACIONES
Alumnos	Procesos de aprendizaje de nociones específicas de matemáticas.
Maestros	Concepciones, conocimientos y opiniones de los maestros. Formación de maestros.
Saber	Nociones y conceptos de matemáticas que son objeto de la enseñanza. Análisis desde el punto de vista matemático, epistemológico, curricular, entre otros.

Recursos	Libros de texto, programas para computadora y otros materiales para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje.
Prácticas de enseñanza	Prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula.
Enseñanza experimental	Programas de enseñanza experimental de nociones específicas de matemáticas.
Educación de adultos	Conocimientos de matemáticas de los adultos, prácticas de enseñanza, currículum, libros de texto.

Fuente: Ávila et al, 2003, p. 10

Por otra parte, se reporta de manera importante que el acercamiento predominante ha sido el estudio de los procesos de aprendizaje de los alumnos, mientras que, por el otro lado, el acercamiento a través del análisis de las prácticas de enseñanza todavía es relativamente poco explorado. *Con respecto a este último punto, esta es una razón más por la cual es importante continuar con este tipo de investigaciones como la que se realiza en este trabajo.* Por otra parte, el tema de los adultos sigue siendo también poco estudiado.

En relación a las investigaciones por categorías, se reporta un desequilibrio claro entre la aritmética por un lado (61 investigaciones) y la geometría y la medición por otro (14 investigaciones). En aritmética hay también una concentración de investigaciones en el tema de números naturales y su operación, en comparación con el tema de los números racionales y la proporcionalidad.

Dado que en el período se reportó la realización de 49 tesis de maestría y 6 de doctorado, para los autores esto representa cierto fortalecimiento de la investigación sobre este nivel educativo en comparación con los años ochenta, y sin embargo sigue siendo limitada esta producción teórica.

Investigación centrada en los alumnos

En cuanto a las investigaciones del aprendizaje matemático de los alumnos, se reporta que en su metodología predominante se encuentra la utilización del interrogatorio y la entrevista clínica, orientándose al análisis de las respuestas de pequeños grupos de niños. Otra forma de recolección de datos consiste en la aplicación de cuestionarios a grupos escolares completos, que se llega a complementar con entrevistas individuales. Lo más frecuente es que se prefiera un tipo de análisis denominado cualitativo por los propios investigadores. Sólo tres de los trabajos utilizaron la estadística para sustentar el análisis y las conclusiones. Esto es de resaltar, pues refleja la tendencia actual, el análisis cualitativo predomina sobre los abordajes cuantitativos.

Se señala que en muchos casos, en la primera mitad de la década, la intención fue reconstruir la génesis de ciertas nociones, el saber cómo los niños “conocen” o “construyen” los conceptos matemáticos; otras veces, particularmente al final, se observa también el interés por estudiar la adquisición de ciertos conceptos o habilidades que supuestamente deberían haber sido transmitidos o desarrollados en la escuela. Es decir que, sin abandonar el interés por los procesos cognitivos, el referente principal para ponderarlos son los objetivos o contenidos curriculares en vigor.

En relación con la edad o el grado que cursan, los alumnos que resultan preferidos son de segundo, tercero, cuarto o sexto grados. Los de primer grado –a pesar de estar en proceso de adquisición de los conceptos matemáticos básicos– y los de quinto –no obstante que éste ha sido un grado considerado tradicionalmente difícil– han sido descuidados por los investigadores. *Por lo que resulta relevante estudiar cómo se inicia o se desarrolla este proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el primer grado.*

Un tema sobre el cual la investigación informa es el de los números naturales. Las aportaciones sobre esta temática van desde el conteo, la adquisición y la lectura de los números de dos cifras en niños pequeños –pasando por la comprensión del valor posicional y los problemas con las cuatro operaciones aritméticas– hasta el cálculo mental. De acuerdo a un estudio realizado por Cortina (1997) con respecto a la comprensión y el manejo del valor posicional, al igual que en niños de otros países, la noción de valor posicional y su funcionalidad no está bien instalada en los niños mexicanos sino hasta en el cuarto grado. Los resultados del estudio de Cortina muestran que los alumnos progresan con el paso de los años, pero la mayoría de los que cursan segundo grado están lejos de haber comprendido el concepto de valor posicional, mientras que en el tercero hay aún quienes se mantienen igualmente alejados, junto con otros que comienzan a adquirir la comprensión. Si bien los niños de cuarto grado muestran haber adquirido la noción, en la mayoría de ellos ésta no constituye un conocimiento firme.

Otro dato importante acerca de esta temática es el que ofrecen Eudave y Ávila (2001, cit. en Ávila *et al*, 2003) quienes señalan que siete años después de haber sido instrumentada la reforma a la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas continúa resultando más difícil a los niños que la realización de cálculos mecánicos.

En cuanto a la metodología de investigación utilizada en los trabajos hasta aquí comentados, en general consiste en la aplicación de cuestionarios (problemas escritos), la realización de tareas diseñadas para hacer aparecer ciertas concepciones y comportamientos, la entrevista crítica. Tal aproximación, a la vez que permite profundizar en las cuestiones que examina, implica al análisis de poblaciones pequeñas. También se señala que hay signos débiles de que la habilidad para resolver problemas –objetivo central de la reforma introducida en 1993– pueda correlacionarse con la práctica de los profesores que han asumido ciertas directrices del nuevo enfoque de enseñanza.

Es a partir de 1997 que se identifica un número mayor de trabajos que han desplazado la preocupación por la cognición en estricto sentido hacia el análisis del aprendizaje escolar, es decir, hacia la ponderación de aquellos conocimientos que, según los objetivos curriculares, los alumnos deberían haber adquirido en la escuela. También se comienza a trabajar desde entonces el aprendizaje en situaciones de interacción. Empero, sólo eventualmente se mencionan las dificultades técnicas para vincular el aprendizaje de los conceptos con la enseñanza recibida, y no se incluyen sino escasas reflexiones o datos que hagan explícita la tensión entre el sujeto productor de conocimientos y las restricciones del sistema de enseñanza. De hecho, sólo eventualmente se ha buscado relacionar los aprendizajes logrados con el análisis de las prácticas de enseñanza, y cuando esto ha ocurrido, se han encontrado dificultades para asociar los primeros con las segundas. *Nuevamente, esto da relevancia al estudio que se reporta en este libro, que se enfocó al análisis de dicha relación entre enseñanza y aprendizaje.*

Investigaciones sobre conocimientos, concepciones, opiniones y formación de maestros.

Se reportan investigaciones en profesores acerca de lo que saben, conocen u opinan sobre las matemáticas y su enseñanza. También se incluyen estudios sobre la formación (inicial o continua) de los

docentes de educación preescolar y primaria y de otros profesionales que intervienen en la enseñanza de las matemáticas en preescolar o primaria.

Ávila y Carvajal (2003) reportan un total de 24 investigaciones; donde casi todas abordan el nivel de educación primaria, aunque otras se desarrollan en educación preescolar, educación normal e incluso en una licenciatura en psicología. Los teóricos en los que se apoyan incluyen a Freudenthal, Vergnaud, Vigotsky y Brousseau; cabe aquí resaltar la preponderancia de los teóricos de la didáctica francesa y de la psicología sociocultural, que ya habíamos ilustrado en el marco teórico y que es un reflejo de la situación en el plano internacional.

Para el desarrollo de las investigaciones por lo general se utilizaron metodologías cualitativas, aunque algunas de ellas se apoyan también en análisis de tipo cuantitativo. Con frecuencia en el apartado de metodología más bien se describen los instrumentos de recolección de datos; los más utilizados son: entrevistas, observaciones, cuestionarios, así como análisis de producciones escritas.

A diferencia del estado que guardaba la investigación en la década de los ochenta, en los noventa se aprecia un incremento importante de estudios que tienen como centro del análisis los conocimientos, las concepciones, las creencias o las opiniones de los profesores, en relación con algún contenido o recurso para la enseñanza de la matemática. Este incremento también se dio en el plano internacional, ante la necesidad de conocer y entender no sólo a los niños sino también el papel de los profesores y formadores en enseñanza de la matemática. El auge de la etnografía como un acercamiento que permite entender aspectos de la realidad escolar que otras aproximaciones no logran, parece ser también un elemento a considerar.

De los diez trabajos identificados, cuatro se centran en las concepciones de los profesores sobre contenidos particulares: las fracciones, la geometría y la medición. Los otros trabajos son sobre creencias y conocimientos geométricos de los profesores o la opinión de los profesores sobre el trabajo en equipo durante la clase de matemáticas. Dos trabajos más investigan las opiniones de los maestros respecto de su práctica docente en matemáticas. Finalmente, dos trabajos que se centran en la práctica, uno que aborda el trabajo en equipo en la práctica, y el otro que estudia la incorporación del enfoque actual de enseñanza de las matemáticas en el salón de clases. *Esto muestra una clara necesidad de continuar la investigación en este campo de las concepciones de los maestros y maestras, específicamente acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como se ha planteado en esta investigación*. Al respecto, no se reporta ningún estudio de este tipo con relación a trabajos acerca de las competencias relacionadas con la suma y la resta, así como con la solución de problemas aditivos. Esto implica la necesidad de hacer trabajos con este estilo, más aún, como antes se indicó, vinculando lo anterior con la enseñanza y la concepción del docente.

Otro tipo de estudios que se reportan es acerca de la formación de los maestros de matemáticas. Los 17 estudios abordan aspectos del enfoque de la enseñanza de las matemáticas, como solución de problemas, la percepción sobre las estrategias, las respuestas y la acción de los niños, las fracciones, la proporcionalidad, la geometría, los números, la aritmética en general, las propuestas didácticas como elementos de formación y aspectos de las prácticas de los maestros durante el trabajo en matemáticas. Ávila y Carvajal, describen que estas investigaciones tienen una presencia importante, sobre todo en la segunda mitad de la década. Si bien en los años ochenta se utilizaba con relativa frecuencia la noción de saberes, en su lugar aparece la investigación sobre lo que se ha dado en llamar concepciones de los profesores. No obstante, es escasa la cantidad de trabajos que definen o ubican teóricamente los conceptos de los que hacen uso, como este de concepciones. La autora afirma que resulta incipiente, a la vez que urgente, la evaluación de la formación en términos de su influencia en las prácticas cotidianas en el salón de clase.

Investigaciones sobre el saber (contenido matemático)

De acuerdo con Ávila y Carvajal (2003), en los estudios sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa la tendencia a considerar que el objeto de enseñanza, el saber específico de que se trate, no está dado de manera unívoca ni transparente y que, por lo tanto, es indispensable analizar sus diversas definiciones posibles, su articulación con otros conceptos, sus propiedades, su génesis histórica. Se señala incluso la necesidad de hacer explícita una reconstrucción del objeto matemático desde la didáctica, reconstrucción que de todas maneras ocurre en la enseñanza, de manera implícita e incontrolada (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, cit. en Ávila y Carvajal, 2003). Esta forma de abordar la didáctica es lo

que ha dado un renovado potencial a las investigaciones contemporáneas en esta disciplina.

Se reportan las siguientes aproximaciones para el análisis del saber:

- Análisis de las formas que asume el contenido matemático en el curriculum: se revisan definiciones y propiedades del concepto en la disciplina, para después analizar los recortes y las interpretaciones específicas que ocurren en la enseñanza.
- Análisis histórico y epistemológico: se revisa el desarrollo histórico del concepto, casi siempre a través de fuentes secundarias.
- Análisis fenomenológico o situacional: a partir del concepto de fenomenología de H. Freudenthal, se revisan y clasifican los fenómenos que el concepto en cuestión ayuda a organizar, o bien, a partir de la noción de situación didáctica de G. Brousseau, de la noción de "estructura multiplicativa y aditiva" de G. Vergnaud, o del análisis de las relaciones entre datos de problemas aditivos de autores como Carpenter y Moser, se estudian las familias de problemas en las que el concepto funciona, destacando los distintos aspectos semánticos ("interpretaciones", "significados", "concepciones") que entran en juego cada vez.
- Análisis curricular: se analizan las formas y significados específicos que asume el concepto en los programas y libros de texto.
- Análisis cultural: se estudian nociones matemáticas en algunas culturas indígenas.

De acuerdo con Ávila *et al*, (2003) el análisis del saber, al mismo tiempo que permite relativizar la noción misma de "saber" al ponerla en relación con instituciones, culturas y períodos específicos, proporciona al investigador una visión más amplia del mismo, desde la cual pueden comprenderse mejor las elecciones (los recortes, las articulaciones privilegiadas, los caminos para la reconstrucción) que subyacen a las distintas formas, existentes o posibles, de organizar la enseñanza.

Investigaciones sobre materiales de desarrollo curricular y otros recursos de apoyo a la enseñanza

El propósito central de los estudios que aquí se reportan, es el análisis de las características didácticas y uso de diversos recursos de apoyo a la enseñanza de la aritmética en educación preescolar y primaria. En la década que se analiza, el interés por estudiar materiales de desarrollo curricular, en especial los libros de texto, y otros recursos como software y calculadoras, es mayor que en la década de los ochenta. Durante los años noventa el recurso más estudiado fueron los libros de texto (oficiales y de editoriales privadas). En este tipo de trabajos el acercamiento metodológico es relativamente variado: los que tienen como propósito conocer o evaluar la forma en que los libros de texto se utilizan en las aulas, establecen el análisis desde enfoques cualitativos, o bien utilizan algún tipo de instrumento que permite el análisis tanto cualitativo como cuantitativo, como en el caso de los estudios de opinión. Otros trabajos se apoyan en el análisis didáctico o de contenido y, ocasionalmente, en el análisis estadístico. Todos los estudios reportados se realizaron en el nivel de educación primaria y algunos de ellos incluso abarcaron también la secundaria. Los estudios fueron:

- Estudios sobre libros de texto: A partir del cambio de enfoque que se propuso oficialmente para la enseñanza de las matemáticas en educación básica, se estudia el uso y opinión que se tiene de los libros, especialmente desde el punto de vista de los maestros, y su presencia e impacto en la práctica. Los libros de texto son los primeros materiales, junto con el plan y programas de estudio, en los que se concreta la reforma en marcha. Entrar en las aulas, entrevistar a profesores, platicar con los niños, redescubrir la fuerte presencia de los libros de editoriales privadas, es una constante en la mayoría de los estudios. Los trabajos de la década sobre los libros de texto gratuitos centran su atención en la forma en que los maestros reciben los nuevos libros oficiales, ya sea a partir de lo que dicen y opinan de ellos, de la propuesta didáctica que presentan o de la forma en que los utilizan en la clase. Otros estudios enfocan el análisis en las propuestas matemáticas y didácticas que sustentan los materiales oficiales en relación con un contenido específico, con todos los contenidos, e incluso se estudian aspectos más puntuales como el tipo de problemas verbales que proponen y las aplicaciones del desempeño docente ante los cambios curriculares propuestos. Por otro lado, los libros de editoriales privadas en primaria también son objeto de análisis desde el punto de vista didáctico. Hay estudios cuyo interés se centra en recursos distintos, como son la pertinencia, relevancia y usos de software, la calculadora y del juego.

Como ya se mencionó, la mayoría de los estudios se centran en el análisis de los libros de texto. Los estudios enfocados al análisis de los libros de texto se hicieron desde perspectivas distintas (análisis didáctico, entrevistas, encuestas). Tanto estos estudios como los consignados en torno al uso de los libros en la práctica fueron realizados, en su mayoría, durante los primeros años de la introducción de los libros de texto gratuitos elaborados bajo un nuevo enfoque didáctico. Quedan por indagar los cambios en su uso o la influencia que pueden haber tenido en el aprendizaje con el paso del tiempo.

En relación a los estudios que se refieren al uso de software y otros apoyos tecnológicos en matemáticas, el análisis didáctico es central pero –además de que sería deseable incrementar este tipo de estudios– también hacen falta análisis más puntuales en relación con contenidos específicos y que consideren el papel que los maestros, los compañeros y otros materiales pueden jugar al utilizar esa tecnología.

La investigación de las prácticas de enseñanza

Conocer y explicar los conocimientos y procesos que tienen lugar en las aulas fue la intención de la década de los ochenta, no obstante, la indagación realizada sobre el tema no sobrepasó con mucho la intencionalidad. Afirmaciones contenidas en el documento que sintetiza la investigación de dicho período muestran tal situación: “Esta es probablemente una de las líneas de investigación en educación matemática menos trabajada en México. Al respecto, sólo se ha difundido un escaso número de trabajos y más escasos son aún, entre ellos, los que aportan elementos para la comprensión de las concepciones a partir de las cuales los profesores organizan sus prácticas” (Block y Waldegg, 1995, cit. en Ávila y Carvajal, 2003).

Dentro de los teóricos y metodologías en las que se basaron los investigadores, se encuentran las teorías desarrolladas por Yves Chevallard (particularmente con la noción de transposición didáctica) y Guy Brousseau, (principalmente su tipología de situaciones didácticas: acción, formulación, validación, institucionalización…) así como la noción de contrato didáctico (*considerada en este trabajo de investigación).* Otra fuente conceptual la constituyen los trabajos etnográficos en sentido estricto, entre los que con frecuencia se mencionan los desarrollados en el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV y en especial los de Elsie Rockwell. Ávila y Carvajal (2003) consideran que las investigaciones no son muchas, pero en conjunto comienzan a desentrañar la lógica del quehacer cotidiano en las clases comunes de matemáticas.

La enseñanza es mencionada por algunos investigadores al inicios de la década que se revisa (Block y Dávila, 1993; Ávila, 1994; cit. en Ávila y Carvajal). En ese entonces, sin embargo, las características de la acción docente no se aludían sino a manera de reflexión, con el fin de contrastar las potencialidades intelectuales de los alumnos con su escasa promoción en la escuela común. Sin embargo, Ávila y Carvajal describen datos más precisos sobre la enseñanza que tiene lugar en las escuelas de la segunda mitad de la década. La mayoría de los trabajos desarrollados en este período tienen como objetivo identificar el cómo la reforma introducida en 1993 ha sido interpretada por los profesores o las formas en que está siendo llevada a cabo. Se mencionan trabajos relacionados con la transposición didáctica y el contrato didáctico. También se discute que dentro de los cambios curriculares, en los que se pretendía entregar el control de la acción cognitiva a los alumnos, éste aún permanece centrado en el profesor.

Sin embargo Ávila y Carvajal consideran que, en cuanto a las aplicaciones, el conocimiento específico sobre las prácticas de enseñanza –sumando a los que otras vertientes de indagación proporcionen– ofrecerá elementos para confirmar, complementar o reorientar las políticas de formación continua de profesores y de revisión de los materiales curriculares que el Estado distribuye en las escuelas.

Investigaciones en la línea de enseñanza experimental

Con respecto a la metodología de los trabajos, se caracterizan por incluir la realización de experiencias didácticas, por lo general en el aula y ocasionalmente fuera de ésta, con grupos pequeños de alumnos. El propósito es, casi siempre, estudiar las condiciones de enseñanza que optimizarían los procesos de aprendizaje de temas específicos de matemáticas. En algunos casos, pocos, la investigación atiende a factores más generales de los procesos, por ejemplo, las formas de evaluación, el efecto de las interacciones entre pares o el efecto de la comprensión lectora, pero siempre en el marco de la enseñanza de un tema específico.

Los aportes son de diversa índole. Algunos trabajos se proponen poner a disposición del sistema educativo alternativas para la enseñanza de temas específicos. En otros se toma un poco de distancia con respecto a dicha expectativa, al subrayar el carácter experimental del estudio; los aportes se ubican entonces en un proyecto de más largo plazo, en el que se busca comprender mejor las relaciones entre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La mayoría de las investigaciones se ubican explícitamente en el marco de alguna teoría sobre los procesos de aprendizaje o de enseñanza. Las principales referencias son las siguientes:

a) La teoría psicogenética de Piaget sobre la construcción del conocimiento y, en ciertos casos, sus aportes relativos a la psicogénesis de una noción matemática específica, con referencias directas o indirectas a obras de la escuela de Ginebra. Debido a que estos referentes teóricos ayudan a explicar los procesos de desarrollo, mas no necesariamente los procesos de enseñanza, las investigaciones que los asumen suelen considerar además los aportes de otros investigadores más cercanos a la problemática de la enseñanza de las matemáticas.
b) La teoría socio-cultural del aprendizaje de Vigotsky. La elección de esta teoría parece obedecer al rol que otorga a la enseñanza en los procesos de aprendizaje, rol más natural y explícito que el marco de referencia piagetiano.
c) La teoría de las situaciones didácticas fundada por Brousseau. Esta teoría también es de filiación constructivista, pero su objeto teórico principal son los procesos de enseñanza de las matemáticas. Las investigaciones que se realizan en el marco de esta teoría buscan aplicar o desarrollar algunos aspectos de la misma, al estudiar procesos experimentales de enseñanza de conocimientos específicos de matemáticas.

De acuerdo con Ávila y Carvajal, si se considera que la teoría de las situaciones didácticas también es de filiación constructivista, y que algunos de los trabajos que se realizan en el marco de la teoría de los modelos locales asumen al constructivismo como referente, puede decirse que este paradigma sigue siendo dominante. No obstante, hay diferencias metodológicas importantes entre los trabajos que se ubican en este paradigma.

Finalmente se dice que se registra cierta diversidad en las metodologías de investigación, incluyendo los tamaños de la población con la que se trabaja (de 5 alumnos a más de 300) y la duración de los programas de enseñanza (de 7 sesiones a 44). Una dificultad metodológica central que se plantea a las investigaciones en la línea de enseñanza experimental, es la determinación de las relaciones causa-efecto entre la intervención didáctica y los aprendizajes de los alumnos.

Se menciona que existen trabajos con este corte metodológico con relación a:

- La noción del número natural
- Operaciones y problemas aditivos (jerarquías, procedimientos, dificultades, errores, etapas del proceso de solución, papel del lenguaje verbal y numérico, la influencia de la interacción y otros factores inherentes al contenido y formas de evaluación).
- Operaciones y problemas multiplicativos
- Las fracciones
- Razones y proporciones
- Probabilidad
- Pre-álgebra
- Área y perímetro

Se dice que en cuanto a los temas matemáticos, se mantiene la investigación sobre dos temas clásicos de las matemáticas de la escuela primaria: la noción de número y las operaciones aditivas, con la particularidad de que ahora se observa un mayor interés por el nivel preescolar (11 de 26 investigaciones son sobre estos dos temas).

Resumiendo, en sus consideraciones finales los autores contempla que:

- La investigación realizada durante los noventa en el nivel de educación primaria produjo un amplio número de escritos, que rebasó en cantidad y temáticas a la realizada en la década de los ochenta.
- El análisis de las prácticas de enseñanza que tienen lugar en aulas comunes es otra de las vertientes que cobró fuerza en los últimos años de la década; esto ocurrió también con los estudios acerca de los profesores y los recursos para la enseñanza. En cambio, la investigación sobre el nivel preescolar o la formación inicial de los maestros muestran apenas un desarrollo incipiente, y una línea de investigación se mantuvo de bajo perfil: la centrada en los adultos.

- Debe señalarse también que los resultados de la investigación en educación primaria sostuvieron durante la década un flujo importante hacia el sistema educativo. Se produjeron libros de texto, libros para los maestros y otros recursos para la enseñanza, en buena medida sustentados en resultados de investigación. Igualmente, los programas nacionales de actualización de profesores, ofrecidos por la Secretaría de Educación, también fueron producto del trabajo de investigadores en el campo de la educación matemática.
- Para cierto tipo de estudios, como podrían ser los clasificados en el rubro de enseñanza experimental, la cuestión es acaso irrelevante, para otros no, pues la intención explícita es conocer lo que ocurre en situaciones comunes y con los actores de los procesos cotidianos de enseñar y aprender.

De acuerdo con el análisis anterior, de manera importante se destaca en forma sintetizada que dentro de la investigación de los alumnos:

Los procesos de aprendizaje de los alumnos han sido más estudiados que en la década precedente, considerando como metodología:

- Entrevistas clínicas
- Observación
- Interrogatorio
- Cuestionarios

Dentro de las poblaciones estudiadas se considera que los grupos de niños de primer grado, junto con los de quinto grado, son quienes han sido los más descuidados en la investigación.

Por otro lado y en relación con la investigación acerca de los maestros, sigue apareciendo que las prácticas de enseñanza han sido poco estudiadas. Sin embargo, se han hecho estudios sobre conocimientos, concepciones, opiniones y formación de maestros, en la que los investigadores se han apoyado más en el siguiente tipo de metodología:

- Metodología cualitativa
- Entrevistas, observaciones, cuestionarios y análisis de producciones escritas.

En síntesis, los dos trabajos anteriores, correspondientes al estudio del estado actual en la didáctica específica de las matemáticas en nuestro país, muestran el balance sobre las principales investigaciones que se han realizado en México, donde se ha hecho un buen número de investigaciones. Sin embargo, uno de los datos que se encuentra en ambos trabajos, es la necesidad de continuar realizando investigación con respecto a lo que ocurre dentro de la práctica educativa, y más centrada en temas específicos, en la que se revele cómo se da este proceso educativo y tratar de aportar soluciones viables a la educación matemática durante los primeros grados, objeto de este estudio.

Para enriquecer y complementar esta información, enseguida se presentan investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con este tema, para cerrar un apartado sobre los principales resultados de las evaluaciones de la OCDE y las evaluaciones del INEE, de las pruebas ENLACE y EXCALE.

4.2 Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta

Para enlazar con el tema anterior, en esta parte se presentan una serie de investigaciones nacionales e internacionales recientes, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la suma y la resta, principalmente durante la solución de problemas aritméticos.

Una primera investigación es el trabajo de García (2002), quien se basó en la premisa de que el entrenamiento para adquirir o mejorar estrategias apropiadas para la solución de problemas matemáticos a alumnos de primaria, puede favorecer el aprendizaje y la motivación hacia esta materia. El autor se plantea el objetivo de elaborar y probar un programa con una orientación cognitiva, para desarrollar habilidades de solución de problemas de suma y resta en niños mexicanos con bajo rendimiento en matemáticas. Se trabajó con una muestra formada por 11 niños y niñas con bajo rendimiento en matemáticas, de nivel económico bajo, que cursaban el tercer y cuarto grado de una escuela pública ubicada en la periferia al suroeste de la ciudad de México. Para evaluar las habilidades y deficiencias generales de los niños en el manejo de los algoritmos, se empleó un instrumento referido al currículo; además se aplicó una prueba para conocer el tipo de estrategias que empleaban los niños para resolver problemas matemáticos de suma y resta y un cuestionario para explorar sus actitudes hacia las matemáticas.

Con base en esta información de las evaluaciones se diseñó el contenido del programa de intervención. Inicialmente se trabajó en la comprensión del sistema decimal, después con los conceptos y algoritmos de adición y sustracción y se finalizó con el entrenamiento para la adaptación de una estrategia auto-instruccional para la solución de problemas. Los resultados mostraron que la comprensión y la práctica del sistema decimal contribuyen a un mejor entendimiento de los conceptos subyacentes a los procedimientos de los algoritmos. Asimismo, se demostró que la adaptación de una estrategia para la solución de problemas, y el análisis y la discusión de los procedimientos con los compañeros, favorecen tanto el desempeño como la motivación de los niños en esta tarea.

También en México, Flores (2002), basada en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, corroboró que la comprensión del significado de la adición y la sustracción es un proceso evolutivo a largo plazo, que es influido por las situaciones y tipos de problemas con los que el niño tiene experiencia, por las relaciones que se establecen entre la adición y la sustracción y por las formas de simbolización que emplea. Observó que la participación activa de los niños en la resolución de los problemas juega un papel central para la comprensión de conceptos cada vez más complejos. En esta comprensión se conjugan dos aspectos: los conocimientos relacionados con los problemas y la experiencia en las situaciones que se narran en los problemas.

En España, dentro de un enfoque cognitivo, Aguilar y Navarro (2000) diseñaron y comprobaron la eficacia de un programa de entrenamiento específico en resolución de problemas aritméticos para 98 alumnos de educación primaria de la ciudad de Cádiz. Se formó un grupo control y un grupo experimental de 49 niños cada uno. La edad media fue de ocho a diez años y el nivel socioeconómico medio-bajo. La fase de intervención consistió de 25 sesiones de entrenamiento en la solución de problemas matemáticos, a razón de dos sesiones por semana de entre 10 a 40 minutos de duración. El grupo control siguió la práctica escolar normal. Se desarrolló un programa específico para el entrenamiento de habilidades de resolución de este tipo de problemas, centrado en medidas heurísticas generales, además de entrenamiento específico en problemas de cambio, de combinación, comparación, igualación, isomorfismo de medidas y producto cartesiano. El procedimiento sigue una estrategia fundamentada en la psicología cognitiva, en la que se han tenido en cuenta los aspectos manipulativos, gráficos y simbólicos en el proceso de resolución de problemas. y la necesidad de emitir una respuesta manifiesta para generar aprendizaje.

Los resultados mostraron diferencias altamente significativas a favor del grupo experimental, lo que indicó la efectividad del diseño instruccional. Mejoró la ejecución de los niños en los problemas aritméticos. Asimismo, fueron capaces de resolver un mayor número de problemas y de mayor dificultad en su estructura semántica. Se concluyó que la toma de conciencia por parte del niño de las distintas categorías semánticas de los problemas de estructura aditiva y multiplicativa y de las estrategias utilizadas para resolverlos adecuadamente, pueden ser desarrolladas de forma progresiva.

Otro estudio en España, a partir de los planteamientos constructivistas: Bermejo *et al* (2000), demostraron que es posible mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta, mediante la aplicación de un programa psico-instruccional que integre simultáneamente al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. Tres ideas básicas fueron los pilares teóricos de este programa: 1) los niños construyen su propio conocimiento matemático, que no adquieren los nuevos contenidos mediante un simple proceso de absorción, sino que los integran y estructuran en función de sus competencias cognitivas; 2) la instrucción en matemáticas ha de organizarse de manera que facilite la construcción de conocimientos por parte del alumno, considerando que profesores y alumnos son creadores de significados, y que los primeros deben ser guías de aprendizaje que estructuran el clima social-cognitivo de la clase; 3) la base para secuenciar los objetivos de instrucción en matemáticas ha de provenir de los conocimientos que actualmente se tienen sobre el desarrollo general de los alumnos, y también del desarrollo que siguen éstos en la adquisición de los contenidos matemáticos específicos.

Se aplicó el programa mencionado durante todo el año escolar en tres primarias públicas de nivel sociocultural medio-alto de la ciudad de Madrid. Los profesores de los grupos experimentales asistieron a un seminario de 10 horas, en los que se analizaba y debatía sobre los principios básicos de la enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva constructivista. También analizaron los diferentes tipos de problemas verbales de sumar y restar y sus niveles de dificultad, las estrategias más frecuentes utilizadas por los niños y los errores típicos. Se entregó a los profesores una secuencia de problemas verbales que por su dificultad convenía enseñar a lo largo del ciclo escolar, para que los integraran dentro de los contenidos del currículo escolar de matemáticas.

Los resultados indicaron que los profesores del grupo experimental cambiaron sus creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, y dedicaron a la enseñanza de problemas verbales más tiempo de lo habitual para ellos. Sus evaluaciones finales se centraron fundamentalmente en los procesos y menos en los resultados. Los profesores del grupo control afirmaron que a lo largo del curso, sus alumnos habían resuelto más cuentas o algoritmos, que problemas.

En cuanto al rendimiento de los alumnos, se observó que el programa de intervención tuvo efectos positivos; el grupo experimental mostró mejores resultados que el grupo control y también una mejoría en sus procedimientos de solución, como es el uso frecuente de estrategias de conteo. En este grupo también se modificó el tipo de errores que los niños cometían, ya que presentaban más errores de ejecución que el grupo control. Asimismo se observó mayor heterogeneidad de errores conceptuales, esto debido a que los niños tendían a poner en marcha diversas estrategias, aunque incorrectas, que les pudieran conducir finalmente al éxito esperado.

Con base en dichos resultados los autores confirmaron sus expectativas: un mayor conocimiento del desarrollo del pensamiento matemático infantil y una mayor comprensión y aplicación en el aula de los principios constructivistas por parte del profesor, redundaría positivamente en la comprensión y en el rendimiento matemático de los alumnos.

Los autores concluyeron que las habilidades matemáticas deben desarrollarse preferentemente en el marco de la solución de problemas, ya que los primeros conceptos que desarrollan los niños sobre la adición y la sustracción proceden de contextos de la vida real, en los que “se da” o “se quita” algo, y nunca de las expresiones numéricas. Señalaron además, que los problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana de los niños facilitan la aplicación de las habilidades matemáticas.

En otra investigación, Flores (1999) diseñó un programa para niños con problemas de aprendizaje con el propósito de que aprendieran, con el apoyo de sus madres, una estrategia auto-instruccional para la resolución de problemas aritméticos. Participaron 16 niños de segundo y tercer grado de primaria de la ciudad de México, que empleaban estrategias inadecuadas para la solución de problemas y sus madres o tutoras estaban consideradas como inexpertas. Se demostró que mediante la capacitación, las madres del grupo experimental podían modificar su estilo de tutoría, de manera que promovieran el razonamiento y la ejecución independiente de sus hijos. Asimismo. se observó que en la ejecución individual, los niños mejoraron en el empleo de la estrategia autoinstruccional para la solución de problemas.

Por otro lado, Farfán (1998) evaluó los efectos de un programa de enseñanza estratégica para la solución de problemas matemáticos. Participaron 23 niños y niñas de segundo y tercer grado de primaria de una escuela oficial de la ciudad de México, que presentaban dificultades en la solución de problemas narrativos de suma y resta. Se conformaron tres grupos: el grupo experimental recibió la capacitación en el empleo de estrategias para la solución de problemas, un grupo control sólo practicó la solución de problemas y el otro grupo control sólo fue evaluado antes y después de la intervención. Se encontró que el grupo experimental desarrolló una actitud positiva hacia la tarea de solución de problemas aritméticos narrativos, incrementó significativamente sus habilidades para la solución de este tipo de problemas y generalizó su aprendizaje a otro tipo de problemas.

En otra investigación, English (1998) analizó las habilidades de niños de Estados Unidos para la solución de problemas matemáticos en contextos formales e informales. Participaron 154 niños y niñas de ocho años de edad, pertenecientes a seis grupos de tercer grado de primaria. Tres grupos pertenecían a escuelas públicas y tres a escuelas privadas, todas ubicadas en un suburbio de clase media. Los resultados del análisis mostraron que los alumnos no contaban con las habilidades necesarias para solucionar problemas matemáticos. En cuanto a los programas de enseñanza, se observó que las actividades que se empleaban eran insuficientes para abordar las interpretaciones de los niños acerca de los problemas. Asimismo, se encontró que los maestros no vinculan las experiencias de los niños con las matemáticas escolares. El investigador concluyó que es necesario que los maestros realicen con sus alumnos actividades informales fuera del contexto escolar, en donde los niños puedan vivir situaciones matemáticas apegadas a su realidad, que les faciliten el aprendizaje de la solución de diversos tipos de problemas.

Otros investigadores (Jordan y Montani, 1997) examinaron las técnicas de cálculo y solución de problemas de dos grupos de niños con dificultades en matemáticas. Participaron 48 alumnos de tercer grado de primaria, provenientes de tres escuelas de una zona de

clase media del distrito de New Jersey. La mitad de los niños tenía dificultades en matemáticas pero no en lectura (dificultades matemáticas específicas), y la otra mitad tenia dificultades en matemáticas y en lectura (dificultades matemáticas generales). Se evaluó a todos los niños a través de problemas de historia y problemas con números reales en dos condiciones: con límite de tiempo, donde la respuesta era verbal y sin límite de tiempo, donde el niño podía emplear los dedos o realizar una operación utilizando lápiz y papel.

Los hallazgos mostraron que los niños del grupo normal se desempeñaron significativamente mejor que los niños del grupo con dificultades matemáticas específicas. Los niños del grupo de dificultades matemáticas específicas se desempeñaron peor que los del grupo normal en condiciones de tiempo límite, pero no en la condición sin límite de tiempo, donde pudieron utilizar estrategias de apoyo.

El análisis de las estrategias utilizadas mostró que los niños con dificultades matemáticas específicas y generales, dependían más de las estrategias de apoyo (en particular del conteo con los dedos) que los niños con rendimiento normal; sin embargo, los niños con dificultades matemáticas específicas utilizaron las estrategias de apoyo más técnicamente, lo que hizo que estuvieran a la par del grupo con rendimiento normal, cuando las tareas eran sin límite de tiempo.

A partir de los resultados obtenidos, los autores concluyeron que los niños con dificultades matemáticas generales parecen tener dificultades de conceptualización básica, falta de procedimientos adecuados de cálculo y problemas para la rápida restauración o corrección.

Desde una perspectiva psicogenética y psicopedagógica, Guerrero (1997) realizó una investigación experimental para analizar las diferentes formas de representación simbólica que hacen los niños, los procedimientos que utilizan, los tipos de respuesta que dan ante los problemas aritméticos, y los argumentos que emplean tanto en caso de acierto como de error. Participó un total de 510 niños y niñas, de segundo a cuarto grados de primaria de escuelas públicas, de nivel socio-económico medio (6 grupos experimentales y 3 de control) de la ciudad de México.

Los hallazgos obtenidos permitieron concluir que el análisis de las conductas de los niños frente a los contenidos de aprendizaje, debe considerar no solamente los aciertos y errores, sino también las formas en que los niños representan la estructura de los problemas y los procedimientos que utilizan para su solución. Guerrero recomienda que los programas didácticos se orienten a favorecer el desarrollo de estrategias y procedimientos de solución variados, donde el niño maneje las relaciones involucradas en el problema, realice estimaciones en torno a los resultados posibles y aplique estrategias espontáneas, no algorítmicas. Como resultado de la investigación, se propuso que los elementos principales de una secuencia didáctica deberían ser: contextualizar el problema a resolver, simular el problema con objetos, interrogar en torno a lo que se puede hacer para resolverlo, socializar las estrategias, y aplicar lo aprendido. La propuesta planteada por Guerrero se relaciona también con los resultados, entre otros, en que los programas didácticos deben considerar de manera importante los conceptos y estrategias propios de los alumnos y alumnas, así como sus propios y naturales procedimientos en la solución de problemas matemáticos.

A partir de un enfoque de la didáctica de las matemáticas, Block, Dávila y Martínez (1995) plantearon el proyecto: *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica,* con el objetivo de crear y poner a prueba estrategias de formación que permitan vincular algunos aportes de la investigación en didáctica con la práctica de los maestros. El proyecto se desarrolló durante el año escolar 1988-1989 en dos escuelas primarias, a las que se les llamó A y B. Sin embargo, los autores de este trabajo sólo citan los ejes de investigación para la escuela B. Se trata de una primaria pública con 18 grupos de primero a sexto grado. En ambas escuelas se organizó un curso-taller de tres horas, en horario de clases, cada quince días. Se dejó este espacio para que los profesores pusieran en práctica, en su clase, elementos derivados directa o indirectamente de las actividades realizadas en el curso-taller. Todas las sesiones del taller fueron registradas.

Se plantearon tres tipos de observación de clase:

- Una observación de una clase mensual de los maestros, 12 en cada escuela.
- Una inter-observación mensual entre los maestros participantes.
- Una auto-observación mensual.

Finalmente se ofreció a los maestros una sesión quincenal de asesoría individual sobre problemas específicos. El contenido general del curso-taller fue el tema “los problemas de matemáticas”. Al iniciarse el curso-taller, se definieron sólo los aspectos generales

del tema, debido a la decisión de programar en detalle los cursos en función de las necesidades de los maestros de cada escuela. Durante el primer trimestre se identificaron en cada escuela los contenidos centrales sobre los que se trabajaría el resto del año. En la escuela B se identificaron dificultades relacionadas con que los problemas matemáticos se planteaban con poca frecuencia, la enseñanza estaba fuertemente centrada en los algoritmos de las operaciones, y que la resolución de problemas tendía a reducirse a la aplicación de un algoritmo previamente enseñado, y después de haber visto un “ejemplo modelo”. Por ello se decidió dedicar un espacio importante al análisis de las concepciones mismas sobre la resolución de problemas y al análisis de los procedimientos de resolución de los alumnos.

De este modo, los tres ejes de análisis siguientes orientaron el desarrollo del taller de la escuela B:

- Eje 1. Procedimientos de resolución de problemas. Durante el primer trimestre se dio prioridad a la realización de actividades destinadas a favorecer un proceso de re-conceptualización de la noción misma de resolución de problemas. Este eje estuvo constituido por tres tipos de actividades: el análisis de procedimientos de los niños, resolución de problemas por parte de los maestros, y el análisis de la conducción de las clases de los maestros.
- Eje 2. Recursos para apoyar a los alumnos en la resolución de problemas. Entre ellos: no dar indicaciones previas y plantear problemas con frecuencia, comentar el enunciado del problema antes de la resolución de éste, pedir a los alumnos un resultado aproximado (estimación) antes de que inicien la búsqueda del resultado exacto y organizar una confrontación colectiva.
- Eje 3. Características de los problemas. Los tipos de problemas que se plantearon a los maestros durante el primer trimestre del curso-taller, tuvieron características similares a los problemas que suelen plantear en la escuela. Más adelante se plantearon problemas con características diferentes a las usuales y se fueron analizando con los maestros al término de las sesiones en que se trabajaron.

Dentro de las conclusiones más importantes acerca del grado de pertinencia de las estrategias de actualización que se pusieron en marcha, estuvieron las siguientes. El tema “La resolución de problemas” resultó, en efecto, adecuado para abordar aspectos relevantes de la enseñanza de las matemáticas en los seis grados de primaria. Por otro lado, el conocimiento promedio de los maestros acerca de los contenidos del programa de primaria es con frecuencia insuficiente, y esto constituye un obstáculo para mejorar su práctica. Se cree que es recomendable que el trabajo se centre simultáneamente y de manera integrada en ambos aspectos. La resolución de problemas por los maestros en pequeños grupos fue una de las actividades más provechosas, al permitir a los maestros experimentar "en vivo" algunas de las características de los procesos de resolución de problemas, y al confrontarlos con lo que suele pedirse a los alumnos. Las actividades derivadas del taller que los maestros realizaron con sus alumnos durante los quince días entre cada sesión, constituyeron una valiosa forma de integración entre la práctica de los maestros y la reflexión dentro del taller. Se proporcionó a los maestros la ocasión de probar y adaptar ciertas innovaciones pedagógicas, y permitió a los investigadores conocer las posibilidades y límites de las mismas, así como comprender mejor las dificultades, no previstas, a las que se enfrenta un maestro en la dinámica de una clase.

Finalmente, el aceptar por parte del profesor la existencia de procedimientos distintos y la importancia de conocer el origen de los errores es un paso difícil, pero comprender dichos procedimientos y errores lo es aún más, sobre todo cuando el maestro debe lograrlo casi al mismo tiempo que los conoce.

En otro estudio, Carpenter *et al* (1986) se proponen investigar si proveer a los profesores el acceso a un conocimiento específico, derivado de la investigación sobre el pensamiento de los niños en un dominio particular, puede influir en la instrucción de los maestros y el rendimiento de sus estudiantes. Esta investigación provee una base para estudiar cómo el conocimiento del pensamiento del niño puede ser aplicado a la instrucción. La investigación está basada sobre un análisis detallado del dominio. En este caso, los problemas de adición y sustracción fueron divididos en varias clases, las cuales se distinguen por los diferentes tipos de acción o de relaciones que representan distintas interpretaciones de la adición y la sustracción. Entre cada clase pueden generarse distintos tipos de problemas por la variación desconocida. Participaron 40 profesores de primer grado, 20 fueron asignados al azar para el grupo de tratamiento y 20 a un grupo control. Estos profesores participaron en un taller de verano durante cuatro semanas, diseñado para familiarizarlos con la finalidad de investigar acerca del aprendizaje y el desarrollo de conceptos de adición y sustracción en niños, y para proveerlos con la oportunidad para pensar y planear la instrucción basada en ese conocimiento. El otro grupo sirvió como un grupo control que participó en un taller de dos horas, centrado en la solución de problemas no rutinarios.

Los participantes en el estudio fueron los maestros (39 mujeres y un hombre) y sus estudiantes, en 40 salones de 24 escuelas localizadas en Madison, Wisconsin, y en cuatro pequeñas comunidades cerca de Madison. Dos escuelas católicas y 22 escuelas públicas fueron incluidas. Los maestros fueron asignados al azar a los tratamientos por escuela. Doce estudiantes de primer grado (seis niños y seis niñas) fueron seleccionados al azar de cada clase para servir como foco para la observación y la entrevista. Los niños con necesidades de aprendizaje especial fueron omitidos de la muestra. El tratamiento fue el taller de la Instrucción guiada cognitivamente. La meta del taller fue ayudar a los maestros a entender cómo se desarrollan los conceptos de la suma y la sustracción, y proveerlos con la oportunidad para explorar cómo ellos pueden usar ese conocimiento para la instrucción. Los maestros aprendieron a clasificar los problemas, para identificar los procesos que los niños utilizan para solucionarlos. La recolección de información formal e informal de cada uno de los maestros, fue mediante la transcripción de audio-grabaciones y de observación en los salones, entrevistas, puntuaciones mediante la Escala Creencias de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI, por sus siglas en inglés) y notas de campo de interacciones informales. En la Escala de Creencias CGI, también se utilizó un instrumento tipo likert de papel y lápiz para recoger información sobre las creencias de los maestros. Para describir los patrones de cambio en los maestros se basaron en la clasificación de niveles.

Con respecto a la medición del aprendizaje del niño, se aplicó el análisis del tipo de problema desde el modelo del pensamiento del niño, que sirvió como base para medir los conceptos y la solución de problemas, empleando una prueba para cada grado. Estas pruebas incluían problemas de adición, sustracción, división y multiplicación con dígitos simples y con varios de ellos e ítems que medían conceptos de valor de lugar. Las pruebas fueron administradas por aplicadores entrenados siguiendo protocolos escritos en cada salto de año, durante dos días consecutivos. Se leían los problemas a los niños y se aseguraba que tuvieran lápiz y papel, pero sin utilizar material manipulable. En algunos casos se midió el tiempo de solución.

En sus resultados se encontró que aunque las prácticas instruccionales no fueron prescritas, los profesores del grupo experimental enseñaron significativamente más solución de problemas y significativamente menos factores numéricos que los profesores del grupo control. Los maestros del grupo experimental animaron a sus estudiantes a utilizar una variedad de estrategias para solucionar problemas, y significativamente pusieron más atención a los procesos que sus alumnos utilizaron, que los maestros del grupo control. Los maestros del grupo experimental conocieron más sobre los procesos de los estudiantes para solucionar problemas. En cuanto al rendimiento, sobre la entrevista de solución de problemas, los estudiantes de clases CGI fueron más seguros en sus habilidades para solucionar problemas matemáticos que los estudiantes del grupo control. Como sus profesores, los estudiantes en las clases CGI fueron significativamente más guiados cognitivamente en sus creencias que los estudiantes del grupo control. Finalmente, en adición los estudiantes del CGI reportaron significativamente una mayor comprensión de matemáticas que los estudiantes del grupo control.

Por otra parte, en un tema curricular, Fuenlabrada en 1996 realizó un análisis del Plan y Programas de Estudio 1993 de la Educación Básica, en el Programa para la Modernización Educativa, en nuestro país. Describe que el cambio principal en esos años en matemáticas se refiere a la metodología de la enseñanza, donde una de las causas fundamentales de la baja calidad de la educación se encuentra en las estrategias tradicionales empleadas en las clases de matemáticas, en las que los alumnos aprenden a través de recibir información. Desde esta perspectiva, lo más fácil de transmitir del conocimiento matemático son los signos que conforman el lenguaje matemático y las reglas de combinación de ellos; sin embargo, los conceptos matemáticos han estado ausentes en la enseñanza y consecuentemente en el aprendizaje de los alumnos.

Fuenlabrada menciona que el nuevo enfoque metodológico trata, en cierta medida, el desarrollo de los procesos intelectuales a partir de experiencias concretas (situaciones problemáticas)

que posibiliten la construcción de conocimiento por parte de los alumnos. Consecuentemente, concluye que el objetivo central de la metodología propuesta para la enseñanza, es que los niños reconozcan, a través del proceso de aprendizaje, que la matemática es:

- Un objeto de conocimiento sujeto a cuestionamiento, análisis y experimentación, en donde las cosas no están dadas de una vez y para siempre.
- Una herramienta útil que permite resolver problemas.

Por otra parte, la investigación en didáctica de la matemática desarrollada en los últimos 30 años, mostró que los niños aprenden:

- Interactuando con el objeto de conocimiento, en un intento por resolver diversas problemáticas que impliquen el concepto matemático.
- Encontrando, cada vez, argumentaciones mejores que defiendan los puntos de vista que se van externando sobre los resultados o estrategias de solución.

Con respecto a los cambios curriculares que se contemplaron en ese programa, Fuenlabrada menciona que el programa anterior estaba organizado a través de unidades temáticas; en cuya organización subyace una concepción *lineal-acumulativa* del aprendizaje, es decir, se concibe a los diferentes conceptos como si fueran ajenos unos a otros, y era en todo caso competencia de los alumnos encontrar las relaciones subyacentes entre ellos.

Así, los cambios curriculares que se expresan en el programa de 1993 están en función de los cambios metodológicos que se proponen.

En términos generales, los cambios curriculares se dan en tres niveles:

a) Organización de los contenidos. La postura teórica que subyace en esta organización curricular considera al aprendizaje como un proceso cíclico y en espiral, esto hace que las estrategias de enseñanza posibiliten el trabajo sobre un mismo concepto, varias veces en diferentes momentos y en situaciones cada vez más complejas.
b) En los tiempos previstos para desarrollar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos. A diferencia de los programas anteriores, se considera una mejor y adaptable distribución para el desarrollo didáctico de los contenidos. La enseñanza de la suma, por ejemplo, va más allá de la enseñanza de un algo-

ritmo, se necesita que los alumnos trabajen con una secuencia problemática que favorezca la construcción del concepto de suma, lo cual implica que los niños tengan la posibilidad de reconocer y diferenciar aquellos problemas que son resueltos por medio de esta operación, de los que no lo son. Más aún, para una buena comprensión del algoritmo de la suma se requiere un buen conocimiento sobre el sistema de numeración decimal, en lo que hace a sus reglas de agrupamiento, disociación, codificación, decodificación y valor posicional. Aquí el tiempo para el desarrollo del concepto de suma es mayor que en la enseñanza anterior. Para terminar con este ejemplo de suma, se espera que alrededor del término del primer semestre del segundo grado escolar, los niños amplíen su concepto de suma.

c) Eliminación de algunos contenidos en los programas de primaria y reubicación de algunos de ellos en secundaria. Los contenidos referentes a los conjuntos y la lógica se retiran porque no favorecían suficientemente el desarrollo del pensamiento lógico. Reubicación de los números negativos, ya que ello requiere de una estructura propia de los alumnos de secundaria. La multiplicación y la división de fracciones pasan a contenidos de secundaria.

Fuenlabrada concluye que el Programa para la Modernización Educativa, en lo que hace al plan y a los programas de matemáticas, propone un cambio sobre la metodología de enseñanza (que toma en cuenta de manera más coherente la forma como aprenden los niños) más que un cambio de contenidos curriculares. Finalmente considera que la realización de los planteamientos del Plan y Programas de Estudio, requiere que los maestros re-conceptualicen a la matemática como un objeto de conocimiento en sí mismo, además, que re-conceptualicen sus estrategias de enseñanza, tomando en cuenta que el aprendizaje requiere ser construido por el sujeto que aprende. No obstante, no se presentan estudios puntuales que agreguen evidencia empírica para sustentar dichos cambios.

4.3 Resultados de la evaluación nacional e internacional de matemáticas en la educación básica

Para continuar la presentación de este libro sobre el análisis del proceso de le enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en esta parte del capítulo se ofrece la información más reciente acerca de las principales evaluaciones[4] nacionales e internacionales sobre el objeto de estudio, lo que ofrece un panorama general acerca de la problemática que vive actualmente esta área de la educación en México.

4.3.1 Evaluación Nacional

Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares. Educación Básica (ENLACE, 2010)

En la última década, en el campo de la educación básica, México ha mostrado serias dificultades en las tres áreas básicas del saber: lectura, escritura y matemáticas. Esta problemática se ha visto reflejada a través de los resultados con *bajo nivel* obtenidos tanto en evaluaciones nacionales (INEE, 2009; SEP, 2010), como en las evaluaciones internacionales (OCDE, 2000, 2003, 2006); las primeras se han centrado en evaluar el aprovechamiento académico basado en el currículo y las segundas centradas en evaluar el nivel de competencia.

En México, respecto al rendimiento académico en matemáticas, una evaluación realizada a nivel nacional es la llamada prueba ENLACE, que por sus siglas significa “Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares”.

De acuerdo con la SEP (2010), ENLACE es el instrumento de diagnóstico más importante del país, que aporta información confiable para valorar el rendimiento académico de las asignaturas evaluadas –español, matemáticas y un materia rotativa– de todos los estudiantes, grupos y escuelas de tercero de primaria a tercero de secundaria. Es una prueba estandarizada diagnóstica, centrada en el conocimiento, que evalúa el resultado del trabajo escolar contenido en los planes y programas oficiales.

Dentro de los principales resultados de esta evaluación, destacan las siguientes tres tablas, correspondientes a tercero de primaria y tercero de secundaria, que incluyen datos generales sobre las muestras participantes y los resultados de aprendizaje en matemáticas para cada grado; se aclara que en las cohortes 2009 y 2010 se aplicó desde primero a tercer grado de secundaria.

Con respecto a la muestra de alumnos participantes (Tabla 3) se observa una participación que va desde los 9 millones hasta por arriba de los 13 millones de estudiantes; al mismo tiempo se apre-

[4] Las evaluaciones que se presentan se han realizado en diferentes áreas del conocimiento básico: lectura, matemáticas, ciencia y otras, sin embargo se enfatiza únicamente el área de matemáticas.

cia un incremento de participantes en la evaluación de 2010, que va por arriba de los 4 millones de estudiantes, al compararse con los participantes de 2006, lo que favorecería la representatividad de los resultados, pese a que de los alumnos programados en todas las evaluaciones, llegaron a faltar aproximadamente entre un millón hasta más de tres millones de estudiantes.

Tabla 3. Escuelas y alumnos participantes en la prueba ENLACE, 2006-2010

AÑO	ESCUELAS PROGRAMADAS	ESCUELAS APLICADAS	ALUMNOS PROGRAMADOS	ALUMNOS APLICADOS	OBSERVACIONES SOBRE COBERTURA DE ESCUELAS
2010	134,747	121,833	16,077,963	13,772,359	Michoacán 50%, Oaxaca 14% CONAFE evalúa de 3º a 6º de primaria y de 1º a 3º de secundaria
2009	133,497	119,669	15,766,608	13,187,688	Oaxaca 24% y Michoacán 51%. Se amplió cobertura a alumnos de 1º y 2º de secundaria
2008	129,051	121,668	11,217,667	9,930,309	Michoacán 1% CONAFE. Oaxaca 90%. Evalúa 3º y 6º de primaria y 3º de secundaria.
2007	128,510	121,585	11,196,013	11,196,013	11,196,013 Oaxaca 82% Michoacán 46%. Evalúa de 3º a 6º de primaria y 3º de secundaria
2006	127,776	112,912	10,821,764	9,529,490	Oaxaca 1% CONAFE. Michoacán 41%. Evalúa de 3º a 6º de primaria y 3º de secundaria.

Fuente: Principales resultados 2006-2010 (SEP, 2010).

En los resultados referentes a los estudiantes de primaria (Tabla 4), en todos los años evaluados prácticamente una quinta parte de ellos está en el nivel insuficiente y cerca o más de la mitad de los estudiantes se ubican en el nivel elemental, lo que ya significaría un grave problema. A pesar de que en los años 2008 a 2009 se observa que disminuye ligeramente el porcentaje del nivel insuficiente y se distribuyen un poco más en el nivel bueno y excelente, lo que aparentemente sería un avance al compararse con los años anteriores, el problema es notorio.

Tabla 4. Resultados históricos Primaria-Matemáticas

AÑO	MATEMÁTICAS-PRIMARIA				
	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS
2006	21.0	61.4	16.0	1.6	7,506,255
2007	20.2	57.5	19.0	3.3	7,962,825
2008	22.8	49.5	23.0	4.7	8,108,694
2009	20.3	48.6	24.9	6.1	7,810,073
2010	19.7	46.4	25.8	8.1	8,323,728

Tabla tomada de Principales resultados 2006-2010 (SEP, 2010).

Con respecto al rendimiento en nivel secundaria, el problema es mayor, ya que se observa (Tabla 5) que desde el año 2006 hasta el 2010, más de la mitad de los alumnos se encuentran en un nivel de rendimiento insuficiente en matemáticas y un mínimo en el nivel excelente, lo que significa que la brecha entre la primaría y la secundaria ha sido mayor conforme transcurren los niveles escolares, a pesar de que también se pueden ver escasos avances. Estos últimos datos concuerdan con los resultados reportados por la OCDE (2000, 2003, 2006) en sus publicaciones acerca de las dificultades en esta área del saber, además de lectura y escritura.

Tabla 5. Resultados históricos Secundaria-Matemáticas

AÑO	MATEMÁTICAS- SECUNDARIA					
	GRADO	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS
2006	3o.	61.1	34.7	3.8	0.4	1,371,202
2007	3o.	57.1	37.3	5.1	0.5	1,526,867
2008	3o.	55.1	35.7	8.3	0.9	1,614,281
2009	1o. a 3o.	54.1	35.5	9.1	1.0	4,997,889
2010	1o. a 3o.	52.6	34.7	10.5	2.2	5,210,309

Fuente: Principales resultados 2006-2010 (SEP, 2010).

Por otra parte, a continuación se muestra otro estudio realizado en México, con los alumnos del sexto de primaria.

Estudio comparativo del aprendizaje de alumnos del sexto de primaria 2005-2007 (inee)

De acuerdo con el INEE (2008), uno de los propósitos de este estudio fue comparar los niveles de logro educativo en Español y Matemáticas de los estudiantes que terminaron sexto de primaria en los años 2005 y 2007, con distintos grados de desagregación, considerados éstos como de mayor importancia para el Sistema Educativo Nacional (SEN). Se esperó que la información de este estudio contribuyera a conocer de forma objetiva y confiable las diferencias en los niveles de aprendizaje de los estudiantes, y aportara elementos para enriquecer la rendición de cuentas en relación con el avance, o retroceso, de la calidad de los servicios ofrecidos por el SEN en el periodo evaluado.

La población a la que se dirigió este estudio comparativo fue la conformada por los alumnos que terminaron el sexto de primaria en México en los ciclos escolares 2004-2005 y 2006-2007, inscritos en escuelas públicas y privadas.

La evaluación del año 2005 incluyó la participación de 47 mil 858 estudiantes de sexto de primaria, provenientes de 2 mil 770 escuelas. De éstos, en números cerrados, 45% de los alumnos evaluados estuvieron inscritos en la modalidad Urbana pública, 22% en la Rural pública y otros tantos en la Privada, casi 9% en Educación indígena y entre 1% y 2% en Cursos comunitarios. Por su parte, la evaluación realizada en 2007 no contempló la representatividad de estudiantes por entidad federativa, razón por la cual la muestra se redujo considerablemente, pues sólo incluyó a 11 mil 999 estudiantes de 715 escuelas.

De acuerdo con el INEE (2008), fue importante hacer notar las diferencias en la proporción de las muestras de estudiantes evaluados en los dos años de 2005 a 2007, en donde la muestra de estudiantes urbanos se redujo de 45 a 31% y la de educación indígena aumentó de 9 a 24%, permaneciendo equivalentes las muestras de alumnos de escuelas rurales y particulares (con 22% cada una). Este cambio obedece a que, para mejorar la precisión de las estimaciones de logro educativo de los estudiantes, fue necesario aumentar los tamaños de las muestras en los estratos escolares más pequeños y de mayor heterogeneidad. No obstante, dado que ambas muestras están ponderadas con sus respectivos pesos muestrales (proporción de estudiantes que representan), los resultados en cada caso reflejan el logro educativo de los grupos de estudiantes evaluados.

La prueba que se aplicó fue el Examen para la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE); el EXCALE es una prueba de aprendizaje que evalúa los contenidos curriculares de las asignaturas que se enfatizan en los planes y programas de estudio nacionales, así como en los libros de texto y en otros materiales educativos. Congruente con esta idea, el EXCALE parte de la premisa de que las puntuaciones de la prueba muestran qué tanto los estudiantes saben y pueden hacer respecto al currículo nacional de las asignaturas evaluadas (INEE, 2008).

Específicamente, para evaluar el conocimiento matemático se aplicó el EXCALE-06 de Matemáticas. Para facilitar la interpretación de resultados de los estudiantes, se definieron cuatro *niveles de logro educativo*, los cuales representan categorías amplias de habilidades y conocimientos que poseen los estudiantes en las asignaturas evaluadas. Los niveles de logro que utilizan los EXCALE son los siguientes: Avanzado, Medio, Básico y Por debajo del básico.

El objetivo del EXCALE-06/Matemáticas, es evaluar los conocimientos y habilidades que los estudiantes adquieren en la escuela respecto a lo que pretende el programa de estudios. Como todos los EXCALE, utiliza el currículo como el principal documento organizador de los contenidos que un estudiante debe aprender, y además, considera el conjunto de oportunidades de aprendizaje ofrecido a los estudiantes a través de otros materiales curriculares (como los libros de texto, ficheros, etcétera) y las prácticas pedagógicas que por lo común se dan en el aula.

El currículo completo de Matemáticas de sexto de primaria consta de los siguientes seis ejes temáticos: 1) Los números, sus relaciones y sus operaciones, 2) Medición, 3) Geometría, 4) Tratamiento de la información, 5) Predicción y azar, y 6) Procesos de cambio. Los cuatro primeros ejes se estudian durante toda la primaria, el eje de Predicción y azar comienza a estudiarse a partir del tercer grado, y el de Procesos de cambio a partir de cuarto grado. En dichos ejes temáticos se agrupan las habilidades y conocimientos particulares de las matemáticas de primaria.

Del total de 130 reactivos del Excale_06/Matemáticas, aproximadamente 56% se refiere a los números, sus relaciones y sus operaciones; 19% a Medición; 9% a Geometría; 3% a Tratamiento de la información; 5% a Predicción y azar; y 8% a Procesos de cambio.

Dentro de los principales resultados (Tabla 6), se observa que la educación rural pública y la educación Indígena en ambas evaluaciones se ubican por debajo de la media nacional, y que los avances son significativos en la cohorte 2007. Caso contrario, la educación privada y la urbana pública se ubican por arriba de la media, que es mejor para la privada, pero sin avances significativos.

Tabla 6. Puntuaciones medias de Matemáticas por estrato escolar: 2005-2007 para sexto de primaria

ESTRATO ESCOLAR	2005		2007		DIFERENCIA*	
	MEDIA	(EE)	MEDIA	(EE)	MEDIA	(EE)
NACIONAL	500	(1.5)	512	(2.3)	**12**	(2.8)
Educación indígena	424	(3.4)	437	(3.5)	**13**	(4.9)
Rural público	421	(2.5)	486	(3.6)	**15**	(4.1)
Urbano público	510	(2.3)	518	(3.4)	7	(4. 2)
Privado	589	(3.2)	589	(3.5)	0	(4.1)

*En negritas se señalan las diferencias estadísticamente significativas
(EE) Error estándar Fuente: inee.

Como complemento a la información anterior, para interpretar con mayor facilidad el aprovechamiento académico de los estudiantes, el INEE emplea cuatro niveles de ejecución (Avanzado, Medio, Básico y Por debajo del básico). En la Tabla 7 se señalan los porcentajes de estudiantes cuyas puntuaciones en matemáticas se encuentran en cada nivel de logro educativo, de acuerdo con el estrato de sus escuelas. Si se comparan los niveles por debajo del básico y medio, se percibe en esta tabla que para la población de estudiantes del país hay menos alumnos (3%) en el nivel inferior en 2007 que en 2005; inversamente, hay más escolares (3%) en el nivel medio en 2007 que en 2005. Es decir, en 2007 disminuyeron los educandos con puntuaciones más bajas, mientras que aumentaron aquellos con puntuaciones medias.

Tabla 7. Porcentaje de estudiantes de sexto de primaria por nivel de logro educativo y estrato escolar en Matemáticas (2005-2007)

ESTRATO ESCOLAR	POR DEBAJO DEL BÁSICO		BÁSICO		MEDIO		AVANZADO	
	2005	**2007**	**2005**	**2007**	**2005**	**2007**	**2005**	**2007**
	% (EE)	**% (EE)**	**% (EE)**	**% (EE)**	**% (EE)**	**% (EE)**	**% (EE)**	**% (EE)**
Nacional	17.4 (0.4)	14.7 (0.7)	52.3 (0.6)	50.4 (0.9)	23.5 (0.5)	26.5 (0.8)	6.9 (0.4)	8.4 (0.5)
Educación indígena	43.2 (1.7)	37.4 (2.0)	48.8 (1.5)	52.8 (1.6)	7.3 (0.9)	9.0 (1.0)	0.6 (0.3)	0.9 (0.3)
Rural público	23.7 (1.0)	19.9 (1.4)	56.9 (0.9)	55.7 (1.6)	16.5 (0.8)	20.4 (1.3)	2.9 (0.4)	4.0 (0.5)
Urbano público	13.6 (0.6)	12.5 (0.9)	52.9 (0.9)	50.8 (1.3)	26.2 (0.7)	28.0 (1.1)	7.3 (0.5)	8.7 (1.4)
Privado	2.7 (0.5)	2.4 (0.5)	31.2 (1.2)	30.8 (1.9)	41.6 (1.5)	43.3 (1.5)	24.5 (1.4)	23.5 (1.4)

Fuente: INEE, 2008.

Al comparar los distintos estratos escolares, se observa que el fenómeno ocurre con mayor frecuencia en las escuelas de educación indígena (cuyos alumnos en el nivel por debajo del básico disminuye 6%), seguidas de la rural pública (cuyos estudiantes en el nivel medio se incrementa 4%) y, finalmente, de la urbana pública (cuyos porcentajes de alumnos suben 2% en el nivel medio).

En cuanto a los resultados por eje temático (Tabla 8), se observa que el tema más sencillo de matemáticas es el relacionado con el *Tratamiento de la información*, mientras que los más complejos son los de *Geometría, Predicción y azar* y *Medición.* También es posible observar que en cinco de los seis grupos de habilidades matemáticas hay una tendencia a mejorar en el lapso de 2005 a 2007, con excepción de Predicción y azar, cuyo porcentaje de aciertos es prácticamente el mismo.

Tabla 8. Porcentaje de aciertos en cada grupo de habilidades matemáticas en sexto de primaria (2005-2007)

HABILIDADES Y CONOCIMIENTO	K	2005		2007		DIFERENCIA	
		%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)
Los números, sus relaciones y sus operaciones	73	50.5	(0.2)	51.8	(0.4)	1.3	(0.4)
Medición	25	41.9	(0.4)	43.7	(0.6)	1.8	(0.7)
GEOMETRÍA	12	39.8	(0.5)	41.6	(0.9)	1.9	(1.1)
TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN	4	57.4	(0.9)	60.1	(1.5)	2.7	(1.8)
PREDICCIÓN Y AZAR	6	41.2	(0.7)	41.3	(1.2)	0.1	(1.4)
PROCESO DE CAMBIO	10	50.6	(0.6)	51.7	(1.0)	1.1	(1.2)

K= número de reactivos. Fuente: inee, 2008.

No obstante, pese a los escasos avances, la problemática en el saber matemático es vigente en educación básica, mismo que se ha observado en las diferentes evaluaciones.

En este sentido, los siguientes datos muestran el panorama para las cohortes del 2005 y 2007 en sexto de primaria, y las cohortes 2005 y 2008 de tercero de secundaria.

Panorama educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación básica

De acuerdo con el INEE (2009), el siguiente indicador, evaluado mediante la prueba Excale, presenta los porcentajes de alumnos que obtuvieron el nivel de logro educativo *Insuficiente* –llamado *Por debajo del básico*– en las aplicaciones de Excale realizadas en 6° de primaria durante 2005 y 2007, y 3° de secundaria durante 2005 y 2008. El nivel *insuficiente* indica que estos alumnos tienen carencias importantes en el dominio curricular de los conocimientos, habilidades y destrezas escolares, mismas que se traducen en una limitación para poder seguir progresando satisfactoriamente en las asignaturas evaluadas.

Tabla 9. Porcentaje de estudiantes que obtienen el nivel de logro educativo ***insuficiente*** en los dominios de matemáticas, evaluados por los Excale de 6º de primaria y 3º de secundaria, según estrato escolar (2005, 2007 y 2008)

ESTRATO ESCOLAR	6º de primaria				ESTRATO ESCOLAR	3º de secundaria			
	2005		2007			2005		2008	
	%	(ee)[1]	%	(ee)[1]		%	(ee)[1]	%	(ee)[1]
URBANA PÚBLICA	13.6	(0.6)	12.5	(0.9)	GENERAL	50.5	(1.3)	50.5	(1.8)
RURAL PÚBLICA	23.7	(1.0)	19.9	(1.4)	TÉCNICA	52.2	(0.8)	54.0	(1.2)
EDUC. INDÍGENA	43.2	(1.7)	37.4	(2.0)	TELESECUNDARIA	62.1	(1.1)	62.1	(1.4)
EDUC. PRIVADA	2.7	(0.5)	2.4	(0.5)	PRIVADA	23.7	(0.9)	24.5	(1.7)
NACIONAL	17.4	(0.5)*	14.7	(0.7)	NACIONAL	51.1	(0.6)	51.9	(1.0)

[1] Resultados significativamente diferentes entre ambas aplicaciones.
Fuente: INEE (2009)

En la Tabla 9 se puede observar que para 6° de primaria, el porcentaje de alumnos en el nivel *insuficiente* de logro registra una disminución en matemáticas, pues se obtuvieron resultados significativamente diferentes a nivel nacional: de 17.4% se redujo a 14.7%.

Los problemas se concentran tanto en matemáticas como en español, en ambas asignaturas en el estrato de educación indígena, pues 40% o más de los estudiantes no han logrado el dominio curricular esperado en estas escuelas.

En la misma Tabla 9, tal como lo indica el INEE, en los alumnos de tercero de secundaria el panorama es desalentador, pues más de la mitad de los alumnos se encuentran en el nivel *Por debajo del básico*, incluso se nota un retroceso, ya que se observa un ligero incremento de alumnos al nivel *Por debajo del básico* pasando de 51.1% a 51.9%.

Sólo como comentario para ilustrar las comparaciones de los resultados entre 2005 y 2008, se observó un aumento del porcentaje de estudiantes que obtienen un nivel de logro educativo *avanzado*; sin embargo, al igual que en el indicador anterior, señalan las grandes brechas existentes entre los estratos escolares.

De acuerdo con la comparación realizada, se observa una tendencia favorable en los niveles de aprendizaje en español y matemáticas para los alumnos de 6° de primaria, aunque no sea significativamente diferente en todos los casos. Mientras que los estudiantes de secundaria no sólo no muestran avance, sino algunos retrocesos.

De este modo, algunas vertientes de exploración están referidas a los estudios sobre la diferenciación de género y respecto a qué está sucediendo en las secundarias, donde básicamente el estrato indígena y las escuelas telesecundarias registran las mayores dificultades, esto dentro de lo que cabe en estos informes, ya que estos resultados dejan mucho que pensar sobre qué hacer al respecto.

Por otra parte, a continuación se muestran los principales resultados de las evaluaciones internacionales realizadas por la OCDE, 2000, 2003, y 2006.

Es necesario aclarar que estos estudios se basan más en la evaluación de competencias, a diferencia de las evaluaciones anteriores sobre el nivel de logro de aprendizajes basados en el currículo.

4.3.2 Evaluación internacional

Estudios de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)

El Informe del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes o Informe PISA por sus siglas en inglés (*Programme for International Student Assessment*) y en francés (*Programme international pour le suivi des acquis des élèves*), se basa en el análisis del rendimiento de estudiantes a partir de unos exámenes mundiales que se realizan cada tres años y que tienen como fin la valoración internacional de los alumnos. Las evaluaciones partieron desde el año 2000 con lectura, en 2003 con matemáticas, el 2006 con ciencias, y el 2009[5] nuevamente inició con lectura, 2012 matemáticas y 2015 con ciencias hasta cerrar el ciclo con las tres áreas; aunque se evalúan las tres áreas, cada evaluación se ha enfocado más en analizar el área que corresponde para el año. Este informe se lleva a cabo por la OCDE, que se encarga de la realización de pruebas estandarizadas a estudiantes de 15 años.

El proyecto se propone medir hasta qué punto la población de estudiantes de 15 años, que han culminado el nivel de educación básica, están preparados para enfrentar el tipo de conocimientos y habilidades intelectuales que exige la llamada "sociedad del conocimiento". Con tal objetivo, el programa PISA consiste en una serie de pruebas que buscan calificar el grado de competencia logrado.

Por cuestiones de actualización, la prioridad del orden y lo extenso de los datos para cada evaluación, se inicia en la más reciente porque muestra la problemática más actual, primero la del 2006, luego la de 2003 y finalmente, de manera breve, la evaluación correspondiente al año 2000.

Informe de evaluación del área de matemáticas de la ocde 2006

En 2006 participaron 57 países, 30 de la OCDE y 27 asociados. Se evaluó aproximadamente a 400,000 estudiantes seleccionados al azar, quienes representaron a cerca de 20 millones de jóvenes de 15 años de las escuelas de los 57 países.

Se aplicaron dos tipos de instrumentos: los cuadernillos de conocimiento y los cuestionarios de contexto. En PISA 2006 hubo nueve versiones de cuadernillos en los que se integraron un total de 184 reactivos en 13 módulos. El mayor número de reactivos se presentó en Ciencias por ser el dominio de evaluación preponderante. De los 184 reactivos, 86 (47%) fueron preguntas abiertas.

PISA se basa en un modelo dinámico de aprendizaje permanente, en el que los nuevos conocimientos y habilidades necesarias para adaptarse con éxito a un mundo cambiante, se obtienen con-

[5] Los resultados de esta evaluación no se incluyen porque se publicarían en fecha posterior al término de la redacción de este trabajo.

tinuamente durante toda la vida. Un concepto crucial en PISA es el término *literacy*, que en diferentes países se ha traducido como cultura, formación, alfabetización, aptitud, etcétera. El concepto de *literacy* (competencia o aptitud), es la capacidad de los estudiantes para extrapolar lo que han aprendido y aplicar sus conocimientos y habilidades en nuevos escenarios; así como para analizar, razonar y comunicarse de manera satisfactoria al plantear, resolver e interpretar problemas en diversas situaciones del mundo real.

Se considera que la adquisición de competencias es un proceso que dura toda la vida y no sólo se obtiene a través de la escuela o el aprendizaje formal, sino mediante la interacción con los compañeros, los padres y la sociedad. Las competencias también se identifican como habilidades complejas que son relevantes para el bienestar personal, social y económico en la vida como adultos. La evaluación 2006 de PISA se centró en Ciencias, pero también evaluó Matemáticas y Lectura.

Referente al área de interés de este trabajo, que es la competencia matemática, ésta y las otras áreas se conciben como las competencias esenciales para el desarrollo de los individuos en una sociedad más demandante y competitiva. La sociedad del conocimiento exige que los ciudadanos, y no sólo los que aspiran a ejercer carreras profesionales, sean competentes matemática, científica y tecnológicamente.

En un entorno real, los ciudadanos enfrentan una serie de situaciones al ir de compras, viajar, ocuparse de su economía doméstica, cocinar, juzgar información de periódicos sobre estadísticas de población, delincuencia y otras, en que el empleo de razonamientos cuantitativos, espaciales u otras capacidades matemáticas, contribuyen a aclarar, formular o resolver los problemas que se les plantean. Estos usos de las matemáticas se basan en las habilidades y conocimientos adquiridos y practicados en el medio escolar, pero exigen también la capacidad de aplicar esas habilidades a unos contextos menos estructurados, que carecen de instrucciones precisas, y en los que se debe decidir cuál será el conocimiento más adecuado al caso y cuál será la forma más útil de aplicarlo.

"La competencia matemática es la capacidad del individuo para identificar y comprender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar las matemáticas y relacionarse con ellas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos" (INEE, 2007).

Los resultados que reporta PISA se presentan en una escala global o combinada y por sub-escalas. Cada área puede tener tres o más sub-escalas. Tanto para la escala global como para las subescalas existen niveles de desempeño diferenciados por un rango de puntaje. Los niveles están asociados a reactivos de dificultad creciente. Los niveles permiten catalogar el desempeño de los estudiantes y describir lo que son capaces de hacer. Los puntajes de los niveles de desempeño se expresan en una escala que va de los 200 a los 800 puntos, con un puntaje promedio de 500 y una desviación estándar de 100 puntos.

Al revisar los resultados, de acuerdo con la puntuación obtenida, México se encuentra en los últimos lugares con 406 puntos, con 36 puntos por arriba de Brasil (Tabla 10), no obstante mejora con respecto a las evaluaciones de 2000 y de 2003. En tanto el país con la puntuación más alta es Finlandia con 548 puntos y le sigue Corea con 547 puntos.

Tabla 10

STUDENT PERFORMANCE ON THE READING, SCIENTIFIC AND MATHEMATICAL LITERACY SCALES, MEAN SCORE, 2006			
Nation	Reading	**Maths**	Science
Australia	513	520	527
Austria	490	505	511
Belgium	501	520	510
Canada	527	527	534
Czech Republic	483	510	513
Denmark	494	513	496
Finland	**547**	**548**	**563**
France	488	496	495
Germany	495	504	516
Greece	460	459	473
Hungary	482	491	504
Iceland	484	506	491

Ireland	517	501	508
Italy	469	462	475
Japan	498	523	531
Korea	556	547	522
Luxembourg	479	490	486
Mexico	**410**	**406**	**410**
Netherlands	507	531	525
New Zealand	521	522	530
Norway	484	490	487
Poland	508	495	498
Portugal	472	466	474
Slovak Republic	466	492	488
Spain	461	480	488
Sweden	507	502	503
Switzerland	499	530	512
Turkey	447	424	424
United Kingdom	495	495	515
United States	..	474	489
OECD average	**492**	**498**	**500**
Brazil	393	370	390
Russian Federation	440	476	479

Fuente: OECD *in Figures* 2009, (2010) www.oecd.org

Los resultados anteriores se complementan con la ubicación de estas puntuaciones de los alumnos en diferentes niveles, que se clasifican de forma general y por área, como se muestra en las siguientes tablas.

A partir de la distribución de los resultados de los alumnos, se definen varias categorías para cada escala medida por las pruebas PISA, denominadas de manera genérica niveles de desempeño o de competencia (Tabla 11).

Tabla 11. Descripción genérica de los niveles de desempeño

NIVEL	DESCRIPCIÓN GENÉRICA
6	Situarse en uno de los niveles más altos significa que un alumno tiene potencial para realizar actividades de alta complejidad cognitiva, científica u otras.
5	
4	Por arriba del mínimo necesario y, por ello, bastante buenos, aunque no del nivel deseable para la realización de las actividades cognitivas más complejas.
3	
2	Identifica el mínimo adecuado para desempeñarse en la sociedad contemporánea.
1	Insuficientes (en especial el 0) para acceder a estudios superiores y desarrollar las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento.
0	

Al centrarse en el nivel que les corresponde a los estudiantes de México, de acuerdo con la puntuación global de 406 puntos obtenidos (Tabla 12), estos se ubicarían en promedio en el nivel 1.

Tabla 12. Niveles y puntajes de desempeño en la escala global de matemáticas, pisa 2006

NIVEL	PUNTAJE
6 Más de 669.30	Los estudiantes que alcanzan este nivel poseen un pensamiento y un razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su entendimiento y conocimiento, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas formales simbólicas, y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para enfrentar situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones respecto a sus hallazgos, argumentos e interpretaciones y adecuarlas a situaciones originales.
5 De 606.99 a 669.30	Los estudiantes que logran este nivel pueden desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias apropiadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica al usar habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, y entendimiento pertinente de estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

4 De 544.68 a 606.99	Los estudiantes son capaces de trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden implicar condicionantes o demandar la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Saben usar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos.
3 De 482.38 a 544.68	Los estudiantes son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias sencillas de solución de problemas. Saben interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, así como razonar directamente a partir de ellas. Pueden elaborar escritos breves reportando sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2 De 420.07 a 482.38	Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Pueden emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1 De 357.77 a 420.07	Los estudiantes pueden contestar preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas o en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos dados.

Por lo que podría decirse que México alcanza en promedio el nivel 1 de desempeño en la escala global de Matemáticas. Los estudiantes de este nivel pueden contestar preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. También son capaces de identificar la información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Además, pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos dados.

No obstante, en México los mayores porcentajes de concentración de estudiantes se registraron en los niveles 0, 1 y 2 (INEE, 2007).

Al centrarse en estos niveles de desempeño, en función de lo que los alumnos pueden hacer, el nivel 2 representa el mínimo necesario para la vida en la sociedad actual, y alcanzar los niveles 5 y 6 significa que un alumno está preparado para realizar actividades cognitivas complejas.

Los resultados de PISA 2006 mostraron que el sistema educativo mexicano debe enfrentar retos importantes: Por una parte, México tiene una proporción elevada de alumnos por debajo del nivel 2 (alrededor del 50%), lo que implica que muchos jóvenes no están siendo preparados para una vida fructífera en la sociedad actual. Por otra, el país tiene muy pocos estudiantes en los niveles más altos (menos de 1% en los niveles 5 y 6), lo que significa que los alumnos de mejores resultados no están desarrollando las competencias que se requieren para ocupar puestos de alto nivel en los diversos ámbitos de la sociedad. El estudio mostró que entre la aplicación de 2003 y la de 2006, los resultados obtenidos por los estudiantes mexicanos mejoraron, sobre todo en matemáticas, lo que es alentador, sobre todo si se considera que la cobertura de la población de 15 años se incrementó en más de cuatro puntos porcentuales (Martínez, 2007).

Informe de evaluación del área de matemáticas de la ocde 2003

Como se mencionó, el PISA 2003 se enfocó a matemáticas, y el objetivo fue determinar qué tanto los estudiantes eran capaces de desarrollar y aplicar modelos matemáticos para tratar con tareas de la vida real e interpretar, validar y comunicar los resultados. Las áreas evaluadas incluyeron las siguientes áreas: espacio y forma, cambio y relaciones, cantidad e incertidumbre. Más de 250 mil estudiantes de 51 países participaron en él, y fue la segunda vez que se aplicó este examen, que tiene una periodicidad trianual. La muestra mexicana participante incluyó 29,983 estudiantes de 1,124 escuelas; esta muestra fue la más grande de todos los países participantes, lo que permitió analizar los resultados no sólo a nivel nacional, sino también por entidad federativa y modalidad educativa.

Los estudiantes se enfrentaron a problemas planteados con diferentes niveles de complejidad, y conforme iban resolviéndolos alcanzaban niveles más altos de desempeño. Así, quienes estaban en el nivel 1 resolvían las tareas más fáciles, mientras que quienes estaban en los niveles más altos lo hacían con problemas mucho más complejos, en donde se requirió extraer información relevante, vincularla con distintas fuentes de datos y utilizar representaciones matemáticas y la flexibilidad para traducir entre ellas.

En los principales resultados, México continuó desempeñándose en las habilidades de lectura, matemáticas y ciencia en los niveles más bajos entre los países de la OCDE, pero por arriba de otros países como Brasil. Esto pudo ser resultado de que un número mayor de estudiantes se desempeñaron en los niveles más bajos y un número menor en los más altos.

En matemáticas, 66% de los estudiantes se ubicaron en el nivel 1 de complejidad y por debajo de él, lo que indicó que sólo pueden realizar tareas muy básicas, tales como identificar información y llevar a cabo procedimientos de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explícitas. En la OCDE el 21 % estaban en los niveles 1 y 0.

Por otra parte, sólo el 0.4% se ubicó en el nivel 5, que es el inmediatamente inferior al más alto. México no tuvo estudiantes que se desempeñaran en el nivel 6. En el caso de la OCDE, el porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles 5 y 6 fue 14.6. En este nivel los estudiantes fueron requeridos a resolver problemas complejos mediante la extracción de información relevante, la vinculación de diversas fuentes de datos y representaciones matemáticas, y de formular y comunicar sus acciones y reflexiones respecto de sus conclusiones. El resto de los estudiantes, es decir, el 30% se ubicó en la media de dificultad.

En este sentido, de acuerdo con resultados del Informe PISA 2003, que se centró en evaluar las matemáticas, reportó que: "las variaciones en el rendimiento han sido desiguales en los diversos países de la OCDE. Finlandia, el país con los mejores resultados en la evaluación de lectura de PISA 2000, conserva su alto grado de competencia lectora y mejora su rendimiento en matemáticas y ciencias hasta alcanzar ya el nivel de los países del Este asiático, cuyos resultados en matemáticas y ciencias no tenían equivalente hasta ahora. En cambio, en México, el país de la OCDE con los peores resultados en la evaluación del año 2000, las presiones para ampliar el acceso a la educación secundaria, todavía limitado (OCDE, 2004), pueden haber contribuido a que el rendimiento haya empeorado en 2003 en las tres áreas evaluadas" (OCDE, 2005).

Lo anterior significa que estos alumnos fracasaban a la hora de demostrar sistemáticamente que dominan habilidades matemáticas básicas, como la capacidad de utilizar la inferencia directa para reconocer los elementos matemáticos de una situación, utilizar una única representación que permita explorar y comprender una situación, manejar algoritmos, fórmulas y procedimientos básicos, realizar interpretaciones literales y aplicar el razonamiento directo (OCDE, 2005).

Finalmente, se muestran los resultados de la primera evaluación, efectuada en el 2000.

Informe de evaluación del área de matemáticas de la ocde 2000

En la evaluación PISA 2000 participaron 28 países de la OCDE y 4 países no-miembros. El área principal fue lectura, y también se evaluaron matemáticas y ciencias; junto con los otros dos módulos, el área principal de cada ciclo ocupa el 66% del estudio y cada una de las secundarias el 17%. Esto permite tener una visión amplia y detallada de la preparación de los alumnos en cada área cada nueve años y una indicación de su evolución cada tres. De la población mexicana participaron 5,276 estudiantes de 15 años, de 183 escuelas.

Para PISA 2000, la preparación o formación en matemáticas descansa en la familiaridad con cierto tipo de conocimientos y destrezas: operaciones básicas con números, manejo de dinero, ideas básicas sobre formas y figuras espaciales y su medición, y nociones sobre incertidumbre, crecimiento y cambio. Pero para una efectiva inserción en la sociedad moderna, es necesario además ser capaz de pensar y trabajar de un modo matemático, sabiendo plantear y resolver problemas, conociendo la extensión y los límites de las conceptualizaciones matemáticas, sabiendo desarrollar y evaluar argumentaciones, modos de representación y de expresión en asuntos con contenido matemático, todo ello en una amplia variedad de contextos personales, sociales y laborales.

Por ello, la preparación o formación matemática se define como la capacidad para identificar, comprender e implicarse en las matemáticas y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida privada, laboral y social, actual y futura de un individuo, como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar. La formación matemática implica la capacidad de hacer uso de las destrezas y conocimientos matemáticos y no sólo la de conocerlos dentro de un currículo escolar. Fue evaluada mediante diversos tipos de preguntas. Al igual que en el caso de la lectura, se presentaron textos en los que se exponía una situación o un problema al que seguían algunos ejercicios basados en los textos. Se utilizaron también combinaciones de figuras y de información escrita. Algunas preguntas fueron de opción múltiple pero las capacidades más elevadas de razonamiento matemático fueron evaluadas mediante preguntas abiertas. Destacaron las siguientes definiciones:

a) Competencias: Destrezas necesarias en el pensar matemático. Las preguntas fueron construidas en torno a diversos tipos de razonamiento matemático, y organizadas en tres grupos: cálculos sencillos o definiciones del tipo más habitual en los exámenes escolares, conexiones que deben establecerse entre ideas y procedimientos para resolver problemas comunes, razonamientos, generalizaciones y comprensión de conceptos, que exigen de los alumnos la realización de análisis, la identificación de los elementos matemáticos de una situación y el planteamiento de sus propios problemas.
b) Contenidos: Conceptos matemáticos. El contenido se definió principalmente en términos de conceptos matemáticos amplios y del tipo de pensamiento que les subyace, incluyendo:
   - Cantidad, espacio y forma.
   - Cambios y relaciones.

Dentro de los principales resultados de la evaluación PISA 2000, de los 28 países originales que conformaban la OCDE en ese año, México obtuvo el último lugar con 387 puntos, por debajo de Luxemburgo con 446 puntos y de Grecia con 447 puntos. En tanto que Japón logró la puntuación más alta con 557 puntos, seguido de la República de Corea con 547 puntos. Al considerar los cuatro países asociados, quedó en antepenúltimo lugar, por arriba de Brasil, que obtuvo 334 puntos (OCDE, 2001).

En otros resultados, que permiten ilustrar un panorama internacional, al comparar respecto al promedio de la OCDE (500 puntos), se clasifican los países en tres bloques, con el criterio de que sus valores medios sean significativamente mayores, iguales o menores a la media de la OCDE. Esta clasificación de los países se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 13. Clasificación de países por sus medias de desempeño en la escala global de matemáticas en pisa 2000

PAÍSES CON MEDIAS SIGNIFICATIVAMENTE MAYORES AL PROMEDIO DE LA OCDE	PAÍSES SIN DIFERENCIA SIGNIFICATIVA CON EL PROMEDIO DE LA OCDE	PAÍSES CON MEDIAS SIGNIFICATIVAMENTE MENORES AL PROMEDIO DE LA OCDE
Hong Kong-China, Japón, Corea, Nueva Zelanda, Finlandia, Australia, Canadá, Suiza, Reino Unido, Bélgica, Francia, Austria, Dinamarca e Islandia.	Liechtenstein, Suecia, Irlanda, Noruega, República Checa, Estados Unidos, Alemania y Hungría.	Federación Rusa, España, Polonia, Letonia, Italia, Portugal, Grecia, Luxemburgo, Israel, Tailandia, Bulgaria, Argentina, **México**, Chile, Macedonia, Albania, Indonesia, Brasil y Perú.

Fuente: OCDE

Como último dato, se observa (Tabla 13) que México está en el grupo de los países con medias significativamente menores al promedio de la OCDE, esto como una última forma de mostrar los resultados de la evaluación 2000.

En síntesis, en este capítulo se han presentado algunas investigaciones relacionadas con los procedimientos y estrategias de solución de problemas (Aguilar y Navarro, 2000; Flores, 1999), la adquisición de los conceptos y algoritmos de la suma y la resta, y de otros trabajos vinculados con el estudio de la mejora en la preparación de los profesores, como es la capacitación de una enseñanza basada en la solución de problemas (Block, Dávila y Martínez, 1995), o la utilización por parte del profesor de los conocimientos matemáticos previos, incluyendo estrategias y conceptos, que poseen los niños (Carpenter *et al*, 1986) para promover un mayor desarrollo del conocimiento matemático.

De esta forma se da una panorámica de la problemática caracterizada por la preocupación de los maestros por centrarse más en la enseñanza del algoritmo (Block, Dávila y Martínez, 1995) de las operaciones de la suma y la resta, que el desarrollo conceptual centrado en la enseñanza basada en el planteamiento y la solución de diferentes problemas matemáticos (Flores, 2002; Guerrero, 1997). De igual forma se destaca la enseñanza del sistema decimal para una mejor comprensión de los algoritmos (García *et al*, 2006, y

Fuenlabrada, 1996) de la suma y la resta. También se presenta una investigación acerca de los resultados del análisis de los planteamientos curriculares.

En cuanto a las evaluaciones masivas a nivel nacional e internacional, en los resultados de estas tres últimas evaluaciones de la OCDE, tanto en el 2000, 2003 y 2006, en la clasificación, México ha ocupado el último lugar en competencia matemática entre los países que conforman la OCDE, y entre los últimos lugares de los nuevos países asociados, a pesar de los avances mínimos en 2006, con la esperanza de ver los resultados de la evaluación 2009, que se publicarán en diciembre de 2010.

Por otro lado, esta problemática de la educación básica en el país ha sido constatada por los resultados de las evaluaciones nacionales mediante las pruebas ENLACE y EXCALE, más referidas al logro de aprendizajes curriculares, aplicados a niños de tercer grado y sexto de primaria, y secundaria, las cuales confirman los hallazgos de las evaluaciones de la OCDE. Ambas evaluaciones coinciden en que los estudiantes de educación básica, que incluye niños y jóvenes, muestran rendimientos o competencias por debajo de lo esperado, como es el caso de los estudiantes de secundaria, donde más del 50 por ciento se encuentran en un nivel de logro educativo *insuficiente* en los dominios de matemáticas (INEE, 2009; SEP).

Algunas reflexiones sobre el marco teórico

En el marco teórico se ha intentando ofrecer un panorama de algunas de las principales aportaciones de la psicología cognitiva, del constructivismo, y sociocultural al estudio de la construcción del conocimiento matemático y a la representación de los profesores. Se ha visto que el modelo teórico y el programa de investigación de Piaget y seguidores de la corriente psicogenética, ha sido uno de los más influyentes, ya que ha dado sustento a la explicación de los procesos cognitivos involucrados en la construcción de la noción de número; conceptos como esquema operatorio, conservación de cantidad, invariantes, operaciones concretas vinculadas a la noción de número, reversibilidad, etcétera y han sentado las bases de otros modelos que intentan explicar, hasta la fecha, el aprendizaje de las matemáticas básicas en los escolares y la necesidad de una enseñanza que considere dichos conceptos. Otros destacados autores han logrado extender dicha mirada hacia concepciones más enfocadas a la cuestión didáctica y no sólo evolutiva o del

desarrollo y han profundizado en los aspectos contextuales e instruccionales involucrados.

La idea perspectiva constructivista del conocimiento aparece en la literatura revisada en este marco teórico, algunos acentuando los factores psicológicos, otros los instruccionales, los referidos a la representación de los actores o a los de tipo instruccional. Términos como "esquema" se mencionan en trabajos como el de Brousseau (1999) en su teoría de las situaciones didácticas de las matemáticas, pero también aparecen en la explicación de la lógica del pensamiento propuesta por Nunes y Bryant (1997) y con otros significados en la explicación del aprendizaje situado de las matemáticas de Carraher, Carraher y Schliemann (1991).

Se vio que Carpenter, Fennema, Franke, *et al* (1999) plantean la existencia de diferentes tipos de problemas o de situaciones, y dentro de ellos, variables, cantidades y acciones que establecen relaciones diferentes. Estas relaciones, en términos conceptuales, ayudan a entender el pensamiento matemático del niño. En estos trabajos se observa un interés por conocer cómo piensa el niño al considerar la solución de problemas matemáticos, así como en relación con las diferentes estrategias que usan para solucionarlos. También enfatizan el interés porque los profesores se acerquen a la comprensión de cómo y qué aprenden los niños, y que esta comprensión ayude a los maestros a realizar los cambios necesarios para una instrucción más apropiada que fortalezca el conocimiento matemático del niño.

El modelo de la instrucción guiada cognitivamente de Carpenter, Fennema, Peterson *et al* (1986) propone que los procesos de adquisición del conocimiento matemático pueden ser explicados mediante lo que ocurre durante la solución de problemas matemáticos. Los niños utilizan estrategias básicas de conteo en el desarrollo de su entendimiento de conceptos numéricos básicos, e ingresan a la escuela con una gran cantidad de conocimiento informal, que puede servirles como base para comprender las matemáticas escolares, durante la instrucción. Las operaciones básicas pueden ser definidas en términos de procesos intuitivos para solucionar problemas y los procedimientos simbólicos pueden ser desarrollados como una extensión de ellos. Se considera que para entender cómo piensan los niños sobre las operaciones básicas, es necesario considerar las diferencias entre los problemas, es decir cómo comprenden y solucionan problemas que implican relaciones de cambio, combinación, igualación y comparación. Por lo que una forma útil de clasificar los problemas es de acuerdo a sus tipos de acciones o relaciones entre sus variables. Estas ideas han sido clave para el desarrollo de esta investigación. La perspectiva anterior y las categorías de problemas y estrategias descritas por estos autores, fueron un punto de partida en este trabajo y como se verá más adelante, permitieron identificar en los participantes de esta investigación una diversidad de estrategias no formales propias de los niños ("naturales", "inventadas", como suelen llamarse) en relación a tipos de problemas matemáticos como los descritos en la literatura.

En cuanto al reconocimiento del tipo de estrategias no formales que desarrollan y emplean los niños y que no corresponden necesariamente a los algoritmos escolares formales, así como las principales estrategias para solucionar problemas aditivos, tanto en la literatura como en este trabajo, como se verá más adelante, resalta que los niños utilizan objetos concretos y estrategias de modelamiento directo, que son después reemplazadas por estrategias abstractas de conteo, gracias a la instrucción. Para este trabajo fue importante corroborar si los niños podían o no solucionar problemas con sus estrategias no formales, representando las variables y su relación con objetos tangibles y si posteriormente, a lo largo de los dos primeros cursos, lograban desprenderse de dichas estrategias para solucionar los problemas mediante procedimientos de conteo mental.

En el currículo de la educación básica se presupone que el conocimiento conceptual del sistema decimal es básico para arribar al entendimiento, y uso efectivo, de los algoritmos formales necesarios para calcular respuestas a problemas de adición y sustracción, como los que se presentan en los primeros grados de la primaria. Otro interés sobre este particular era dilucidar si esto es así y bajo qué condiciones, dado que actualmente la secuencia y organización de contenidos en la enseñanza de las matemáticas descansan sobre este supuesto. En esta investigación se encontraron hallazgos interesantes que pueden llevar a proponer otras opciones didácticas.

De manera importante, la teoría de las situaciones didácticas, planteada por Guy Brousseau (2000), permite analizar el objeto de estudio de este trabajo desde la perspectiva del triángulo didáctico o interactivo. Esta teoría contribuye a comprender los procesos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, trata de aclarar de

manera importante la influencia recíproca entre alumno-maestro, considerando la transmisión del saber, y contempla de manera importante la influencia de aspectos sociales y contextuales. En particular para esta investigación, resulta primordial analizar lo que el autor denomina contrato didáctico, que nos permitió acercarnos a una mejor comprensión de lo que ocurre durante las relaciones didácticas entre el alumno y el profesor, en el momento que se intenta la transmisión de un objeto de saber. Esta fue una base teórica importante, pues se abocó a analizar el tipo de contrato didáctico que se daba en las aulas que observamos durante clases específicas, enfocadas a la enseñanza-aprendizaje de las operaciones de suma y resta o la solución de problemas aditivos, en los dos primeros grados de primaria.

Si bien los enfoques anteriores ayudan a describir el aprendizaje matemático en los niños y la ocurrencia de las relaciones didácticas entre profesor-alumno, falta establecer como objeto de estudio en este trabajo, el interés por acercarse a develar las representaciones o concepciones de los profesores. Como antes vimos, el trabajo teórico acerca de las concepciones (Thompson, 1992) que para fines de este trabajo incluye las creencias epistemológicas (Hofer y Pintrich, 1997; Schommer, 1990)* y el pensamiento pedagógico del profesor (Monroy y Díaz, 2004), resultan útiles para poder contrastar lo que conciben una maestra y un maestro acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con su práctica educativa en el aula. Además permite dar significado a la actuación de los profesores y entender sus referentes, ejes de problemática y dilemas que encuentran en su enseñanza. Para algunos autores, el análisis de las representaciones docentes contribuye a explicar la influencia que tienen sobre el tipo de instrucción, e incluso sus efectos en la calidad y características del aprendizaje matemático que adquieren los niños durante la enseñanza (Gill *et al*).

Dado que el interés de esta investigación fue acercarse a una mirada más holística del objeto de estudio, se considera que cada una de las teorías o propuestas de los autores son fundamentos que proporcionan una mirada interesante, pero parcial, de lo que se intenta estudiar. Por el contrario, la confluencia de estas perspectivas ofrece una serie de postulados que permiten explicar el conocimiento matemático del niño, así como también la manera en que puede estar influyendo el pensamiento y la actuación del profesor, tomando en cuenta el contexto educativo en que participan.

Es decir, resulta importante enfocar tanto el análisis de aspectos cognitivos relacionados con las estrategias y conceptos (como lo hacen Carpenter *et al*), pero al mismo tiempo dilucidar el tipo de contratos didácticos asociados a determinadas formas y contenidos de enseñanza (interés que surge a partir de Brousseau y su teoría de las situaciones didácticas).

El interés en este campo de investigación también desemboca en el aspecto instruccional o de intervención educativa. Los autores e investigaciones citadas han permitido fundamentar programas educativos con orientación cognitiva, constructivista, situada para afrontar la enseñanza de cuestiones como la solución de problemas de suma y resta en la educación básica. Estas propuestas se han centrado en el desarrollo de habilidades de cómputo, y en el empleo de estrategias que favorezcan que el niño razone el problema y que actúe autónomamente en su solución, tomando en consideración aspectos diversos (cognoscitivos, lingüísticos, socio-emocionales y características de desarrollo del individuo). En esta dirección, con el trabajo realizado y sus hallazgos, se espera contribuir en la parte final del trabajo con una diversidad de propuestas para la enseñanza de las operaciones matemáticas que aquí se estudian. La literatura revisada ha llevado a tomar postura a favor de los modelos instruccionales que consideran el contexto situado de la enseñanza de las matemáticas (Carraher, Carraher y Schliemann, 1991[6]).

De esta manera, se asume que hay que considerar la naturaleza de los conocimientos de los niños; es preciso que en la enseñanza se aprovechen los conocimientos matemáticos que traen consigo los niños y a partir de ahí, diseñar situaciones didácticas que contribuyan al desarrollo de esos conceptos matemáticos, que promuevan un aprendizaje significativo y que permitan un conocimiento trascendente para la vida, no sólo para la escuela.

La revisión de la literatura lleva a tomar postura a favor de que el papel del maestro debe ser el de facilitador o guía, pero en el sentido de mediador del conocimiento, no de espectador al margen del mismo. Debe fomentar que el niño utilice sus propias herramientas y estrategias. También se sugiere que sea sensible y tenga conocimientos sobre la experiencia de los niños, para así poder vincular el conocimiento matemático con dicha experiencia; consecuentemente, el aprendizaje matemático tendrá significado

[6] Estos autores emplean originalmente el término *epistemological beliefs*.

para el niño (English). Esto último condujo a analizar en buena medida las prácticas educativas del profesor y la manera en que, a través de su actuación en el aula, promueve o no la construcción de los conocimientos matemáticos en sus alumnos.

Finalmente, el análisis de la literatura revisada cumplió otro cometido, apoyar a determinar las herramientas metodológicas de esta investigación. Por un lado, siguiendo la línea cognitiva del estudio de los procesos de construcción de las nociones matemáticas, se optó por diseñar un instrumento de evaluación de conocimientos y habilidades en los niños y una entrevista enfocada a desentrañar las representaciones del docente. Por otra parte, en estrecho vínculo con la teoría de las situaciones didácticas, se generó la estrategia para la observación y análisis de situaciones específicas vinculadas con la enseñanza de la suma y la resta, así como para analizar cuál es el compromiso y obligaciones que se establecen entre el profesor y el alumno (contrato didáctico), dentro de dichas situaciones.

Del apartado sobre el estado de la investigación en didáctica, los trabajos muestran los objetos de abordaje, las teorías utilizadas, así como las metodologías y formas de tratar de solucionar esta dificultad, no sólo en nuestro país sino también en otras partes del mundo.

Respecto a México, los últimos resultados de evaluaciones nacionales (INEE, 2006-2009) e internacionales (OCDE, 2001, 2005, 2010), muestran la problemática tan grave que vive la educación básica en nuestro país, donde independientemente de los últimos lugares en las clasificaciones, los niños y adolescentes muestran serias dificultades en el campo del saber matemático, además de otras áreas, desde el preescolar, la primaria y la secundaría, sin profundizar en el resto de los niveles. El diagnóstico es muy claro: los niños y adolescentes que cursan la educación básica se encuentran en los niveles más bajos de aprovechamiento académico y de competencia matemática, por lo que es indispensable continuar la labor de investigación y de trabajo cooperativo con todos los actores involucrados, que permitan la prevención, la intervención y la solución a este problema, que ya tiene repercusiones en el desarrollo integral de nuestros niños y adolescentes, a corto y largo plazo.

En este marco, a continuación se presenta el capítulo correspondiente a la consistencia de la metodología con la que se aborda el objeto de estudio en esta investigación.

CAPÍTULO 5

Metodología de la investigación

5.1 Planteamiento del problema

Con base en el marco teórico desarrollado en los capítulos antecedentes, se puede afirmar que la educación matemática a nivel básico actualmente padece una problemática caracterizada por un bajo nivel de aprovechamiento (Andere, 2003; INEE, 2006-2010; OCDE, 2001, 2005, 2010; SEP, 2010), donde los esfuerzos realizados en las principales investigaciones sobre el tema se centran en su mayoría en un análisis individual del saber matemático de los niños (Guerrero, 1997; Flores, 2002; García, 2002), en las características de la enseñanza del profesor o en los contenidos del curriculum (Block y Álvarez, 1999). En México, aun cuando a finales de la última década se ha dado inicio a las investigaciones de los procesos educativos de las matemáticas que ocurren dentro del aula, existe actualmente la necesidad de fomentar este tipo de investigaciones (Ávila y Carvajal, 2003), más focalizadas en las prácticas educativas escolarizadas y cotidianas y en un análisis integrado de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

5.2 Preguntas de investigación

En atención a la problemática planteada, este trabajo se centra en el análisis de los procesos involucrados en la enseñanza-aprendizaje durante la adquisición conceptual y algorítmica de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos, que ocurren en niños que cursan el primero y segundo grado de educación primaria. A partir de las consideraciones anteriores, se establecieron las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los *conocimientos matemáticos* (conceptuales y algorítmicos) que adquiere el niño respecto al aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos?
- ¿Cuáles son las *concepciones del maestro* acerca de la enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos?
- ¿Cuáles son los tipos de *contratos didácticos* que se establecen entre el profesor y los alumnos en su relación didáctica durante la enseñanza algorítmica y conceptual de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos?

5.3 Objetivos

Objetivo general
Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula durante la adquisición de los conceptos y algoritmos de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos con relación a las concepciones docentes, así como del tipo de contrato didáctico que se establece entre profesores y alumnos.

Objetivos específicos

Del alumno:

1. Analizar los conocimientos (conceptuales y procedimentales) que adquieren los alumnos durante el aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.

Del profesor:

2. Analizar las concepciones del profesor relativas a la enseñanza conceptual y procedimental de la suma y resta y la solución de problemas aditivos.

Con respecto a la relación que se establece entre el profesor y sus alumnos:

3. Analizar la relación entre el profesor y el alumno en términos del tipo de contratos didácticos que se promueven en el aula.

5.4 Tipo de estudio

La presente investigación se llevó a cabo desde una aproximación metodológica mixta de método combinado, que incluye conjuntamente un análisis de tipo cualitativo y cuantitativo. En el primer caso y de acuerdo con Denzin y Lincoln (1998), la investigación cualitativa es multi-metódica en esencia, puesto que investiga realidades múltiples e involucra una aproximación naturalista, a la vez que interpretativa, de su objeto o problema de estudio. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en su ambiente natural, haciendo sentido o interpretando un fenómeno en términos del significado atribuido por los individuos participantes. La investigación cualitativa involucra la colección y el uso de una variedad de materiales empíricos (estudios de caso, experiencia personal, introspección, historia de vida, entrevistas, narraciones o textos observacionales, historias) que describen la rutina, los momentos y los significados en las vidas de los individuos.

La presente investigación plantea una vertiente cualitativa, ya que se centra principalmente en la observación e interpretación de cómo ocurre naturalmente el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro del aula, en dos grupos de educación primaria en una escuela pública. El propósito de esta investigación es describir y analizar el conocimiento matemático que adquiere el niño en términos del entendimiento conceptual y algorítmico de la suma y la resta, y la solución de problemas aditivos. Asimismo, se busca describir e interpretar las concepciones que tienen los maestros acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en una serie de dimensiones y categorías. También se enfoca a estudiar la relación o contrato didáctico que se establece entre los profesores y los alumnos, en el proceso que se sigue durante la impartición de una secuencia de clases a lo largo del año escolar. Finalmente, se busca mediante una triangulación metodológica describir las relaciones que se establecen entre los objetos de estudio y los actores bajo estudio: los alumnos, los docentes y los contenidos matemáticos de interés, en un contexto educativo determinado (las aulas de primero y segundo grado en una escuela primaria pública).

La investigación consistió de un *estudio de casos*. Al respecto, Rodríguez, Gil y García (1999) definen el estudio de casos como un "examen completo o intenso de una faceta, una cuestión o quizás los acontecimientos que tienen lugar en un marco geográfico a lo largo del tiempo". Estos autores refieren que lo que caracteriza al estudio de casos es el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos, más que la verificación o comprobación de lo previamente establecido. En este estudio se consideró como caso el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos, que ocurre a lo largo del ciclo escolar, con la participación de los docentes y el alumnado de un grupo de primero y otro de segundo grado de primaria en una institución pública. En la revisión de la literatura antecedente, se estableció que no existen estudios que traten de explicar este fenómeno de manera integral y con la debida profundidad (vinculando la enseñanza, el aprendizaje y las concepciones), específicamente en poblaciones como las que nos interesan (docentes y alumnos de primer y segundo grado en escuelas públicas mexicanas).

De acuerdo con Stake (1995), el presente es un estudio instrumental colectivo de casos, ya que se realiza para llegar a comprender algo que se vincula con una necesidad de comprensión general del objeto de estudio[1].

[1] Para Stake (1995) los estudios de caso se pueden clasificar en *intrínsecos, instrumentales y colectivos*, cuyas características se pueden resumir como sigue:

a) *Estudio intrínseco de caso*. En éste, lo que se pretende es alcanzar una mejor comprensión del caso concreto. No se trata de elegir un caso determinado porque sea representativo de otros, o porque ilustre un determinado problema o rasgo, sino porque es en sí mismo de interés; la finalidad no se centra en comprender algún constructo abstracto o fenómeno genérico, tal como la alfabetización o el uso de drogas en la adolescencia; el estudio está comprometido en el interés intrínseco del caso. Muchas veces no es posible elección alguna, a la hora de escoger un caso, porque "nos viene dado" al decidirnos por estudiar a un alumno con dificultades, abordar determinados procedimientos o realizar la evaluación de un programa. Entonces ese caso "dado", no nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre *ese* caso particular.

b) *Estudio instrumental de caso*. No se interesa por el caso en sí, sino por comprender un determinado problema o rasgo o bien algún constructo abstracto o fenómeno genérico; es decir, es un instrumento para conseguir algo diferente a la comprensión intrínseca del caso mismo. En este tipo, el caso se examina para afinar un tema o profundizar una teoría. El caso en sí aquí es secundario, juega un papel de apoyo, facilitando la comprensión de algo; puede ser característico de otros, o no serlo. Un caso instrumental se elige en la medida en que aporte algo a la comprensión del tema objeto de estudio. Por ejemplo, si el tema fuese la introducción de un nuevo sistema de evaluación, su orientación y su impacto en la forma de enseñar de los profesores, se podría elegir una profesora como objeto de estudio, observar de forma general cómo enseña y de forma más particular cómo califica los trabajos de los alumnos y si ello afecta o no su modo de enseñar. Aquí el estudio de caso sería un *instrumento* para conseguir algo distinto a la comprensión de esa profesora concreta.

c) *Estudio colectivo de casos*. Siguiendo con la misma situación hipotética, quizá sería oportuno elegir varios profesores como objeto de estudio y no sólo uno. Entonces cada caso sería un instrumento para aprender algo sobre las normas de calificación, pero deberá existir una buena coordinación entre cada uno de los estudios individuales. A esto se llama estudio colectivo de casos; en realidad es estudio instrumental extendido a varios casos. Stake (1995) afirma que la distinción que hace no se debe a su utilidad para asignar los casos a estas tres categorías, asignación que no siempre es posible decidir, sino que las técnicas que se van a emplear serán diferentes y dependerán de que el caso sea intrínseco o instrumental. Entre más intrínseco sea el interés de un caso, más se deben refrenar la curiosidad y el interés por otras historias, para centrarse en los temas específicos del caso. Sin embargo, en su opinión, todos los estudios de casos deben ser descriptivos e interpretativos y a la vez enfocados a comprender la experiencia humana, empáticos y facilitadores de la comprensión de sus lectores a través de descripciones lo más densas posible.

Lo que aquí interesa comprender es una serie de procesos y representaciones relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las. matemáticas elementales en primero y segundo grado de primaria; por esto mismo se eligieron a dos docentes y sus respectivos grupos de alumnos como objeto de estudio y no sólo a uno. Cada caso (docente y su respectivo grupo de alumnos), es un instrumento para aprender más acerca de la construcción del conocimiento matemático en los primeros grados escolares. Se decidió trabajar con un grupo de primer grado y otro de segundo, dado que es en esos dos grados en que está previsto, desde el marco curricular el proceso de apropiación de los contenidos matemáticos que nos interesaba estudiar, y al mismo tiempo, porque la literatura especializada sobre el tema se centra precisamente en escolares de esos grados y rango de edad. Es importante destacar que la delimitación del foco de análisis en los casos bajo estudio estuvo presidida por un enfoque teórico, en el cual se considera crucial el estudio de los elementos del triángulo didáctico: profesor, alumnos y contenido.

De acuerdo a Yin (1994), la identificación de la *unidad de análisis* se refiere a la necesidad del investigador de establecer los límites del caso tan claramente como sea posible, en términos de quién se incluye, el área geográfica y tiempo de inicio y finalización del caso. Es importante señalar que una vez que se ha identificado el caso, la unidad de análisis queda descrita dentro del contexto del caso. Los casos definidos en este estudio incluyen a dos profesores y sus respectivos grupos de alumnos de primero y segundo grado, en la escuela primaria pública "Participación Social", turno matutino, que se ubica al sur de la ciudad de México (ver más adelante). La unidad de análisis es el tipo de relación didáctica que se establece entre los alumnos y su maestro en el proceso de enseñar y aprender determinados contenidos matemáticos, relación que se encuentra mediada por las concepciones y actuación del docente y los propios conocimientos de los alumnos.

En este sentido, a través de la utilización de técnicas de observación, filmación, grabación y entrevistas, se buscó obtener los datos necesarios para poder explicar y dar sentido a las representaciones y actuaciones de docentes y alumnos involucrados en el proceso de enseñar y aprender contenidos del dominio específico de las matemáticas elementales. Se buscó arribar de manera integral a entender las relaciones y los conceptos característicos de este proceso de enseñanza y aprendizaje de los dominios matemáticos

específicos, ampliando la experiencia, confirmando lo que ya se sabe, con el fin de aportar información útil que contribuya a otras investigaciones. Se espera que los resultados puedan ser utilizados para mejorar la calidad de la instrucción de estos conocimientos.

La validez de las técnicas se realizó siguiendo los siguientes criterios: para la validez externa, se buscó satisfacer el criterio de validez ecológica en la medida que "el hecho seleccionado representa bien el ámbito sustantivo de realidad que se quería conocer y no es necesario intentar otro…" (Olabuénaga, 1999). El siguiente criterio es el metodológico, pues en la medida en que el método sea claro y preciso en su descripción, es de esperarse que se obtengan resultados muy similares en condiciones afines al método. Y el criterio explicativo, donde se vigiló que los conceptos utilizados no fueran superados en su capacidad para explicar el fenómeno en estudio. En cuanto a su validez interna, se consideró el criterio de validez de los instrumentos a través de su correspondencia entre los conceptos y técnicas utilizadas, y el de fiabilidad, en la medida en que se cuidó el control de las técnicas para obtener los datos, como fue el caso de la observación y las entrevistas, logrando consistencia interna y estabilidad en los datos que se obtuvieron.

Un último recurso metodológico para lograr la validez de los datos y de los resultados fue la triangulación metodológica, que consiste en contrastar y relacionar los datos encontrados a través de las diferentes técnicas utilizadas para la obtención de información. En este estudio se contrastaron los resultados de la prueba aplicada a los alumnos, los resultados de la entrevista a los profesores y la observación de la clase. También se condujo la triangulación de las fuentes de datos, ya que se observaba si el fenómeno o caso seguía siendo el mismo en otros momentos, en otros espacios o cuando las participantes interactuaban de forma diferente. En el análisis de los resultados de los alumnos, se recurrió a la denominada triangulación del investigador o validación por jueces, donde se hace que otro investigador o investigadores (jueces) observen y analicen un mismo fenómeno o conjunto de resultados (Stake, 1995). Esto último permitió la construcción y validación del instrumento que valora los conocimientos matemáticos de los alumnos.

En cuanto al componente cuantitativo de esta investigación, éste estuvo presente en relación al análisis estadístico de los resultados del instrumento de conocimientos aplicado a los dos grupos de alumnos de primero y segundo grado. Consistió tanto en un análisis estadístico descriptivo como en la aplicación de pruebas de inferencia estadística (ver análisis de resultados). Dicho análisis no fue el foco central del estudio, pero sí aportó elementos valiosos para la comprensión del fenómeno de interés y para la interpretación de los resultados.

5.5. Contexto de la investigación: escenario y participantes

Descripción del escenario

Uno de los primeros pasos que se dieron en esta investigación, fue realizar una solicitud a una escuela primaria pública de turno matutino que se ubica al sur de la ciudad de México, sobre avenida San Fernando en la delegación Coyoacán. Gracias a la disposición del personal de la misma y facilidades brindadas, fue posible realizar en ella el estudio y acceder a los casos de interés.

A partir de entrevistas y de acuerdo a la descripción de su directora, de algunos de sus profesores y de pláticas informales con el resto del personal, esta escuela se caracterizaba por recibir a niños que no eran aceptados en otras escuelas, principalmente por el tipo de comportamiento que mostraban o por su bajo aprovechamiento académico. Cabe señalar que existía una opinión generalizada entre los docentes respecto a que los principales problemas de los alumnos que asistían a esta institución son la falta de respeto a la autoridad, la indisciplina, una pobre autoimagen y el no respetar turnos y tiempos en las sesiones de clase. Esta escuela tenía un carácter asistencial y recibía a hijos de madres trabajadoras, muchas de ellas a cargo totalmente de la familia y con escasos recursos económicos. Por ello, un número considerable de alumnos estaban bajo el régimen de medio internado, es decir, entraban a las 8 de la mañana a clases regulares, pero salían hasta las 5 de la tarde, recibiendo apoyo en alimentación y cuidado en el horario vespertino. Se contaba con el apoyo de médicos, trabajadores sociales, personal de comedor, de intendencia, de vigilancia, un maestro de educación física, una trabajadora social de Unidades de Servicio y Apoyo a la Educación Regular (USAER) y un maestro auxiliar; este último se encargaba de trabajar con el grupo actividades artísticas o recreativas por las tardes. Cabe señalar que el subsidio económico del plantel provenía del Gobierno del Distrito Federal.

En total, la escuela contaba con una planta docente de 12 maestros, la Directora de la escuela, una Jefa de Clase y una maestra de USAER, siendo un total de 15 maestros. Se tenían 2 grupos por cada grado, es decir doce grupos. Con respecto a la descripción física de las instalaciones, esta escuela contaba con dos patios y un jardín trasero; el patio principal tenía unas dimensiones aproximadas de 15 metros de ancho por 30 metros de largo. Las aulas presentaban las condiciones habituales de las primarias públicas, un mobiliario consistente en mesabancos para los alumnos, escritorios y sillas para los docentes, pizarrón, archivero y útiles de trabajo básicos. El número de alumnos que asistían al plantel, al momento de realizar la investigación, se estimaba en 373.

En cuanto al ambiente educativo y las rutinas, los niños entraban a partir de las 7 horas para poder tomar su desayuno, posteriormente, a las 8 de la mañana sonaba el timbre para que se formaran en el patio principal, ahí recibían indicaciones de actividades a realizar o del buen comportamiento que deberían observar en el aula. Después pasaban a su salón donde recibían clases hasta las 10:30 horas, momento en que nuevamente sonaba el timbre para salir al recreo, posteriormente, a las 11 horas regresaban a sus salones y los maestros continuaban con sus clases. A las 13 horas los niños pasaban a los comedores para recibir sus alimentos; a las 14 horas regresaban a sus salones para trabajar actividades recreativas y artísticas con el maestro auxiliar. Es necesario decir que cada grupo recibía una clase semanal de computación con una duración aproximada de una hora, de igual forma ocurría con educación física. En cuanto a los profesores, éstos mantenían una reunión con la directora el viernes último de cada mes escolar, donde se discutían y mostraban las dificultades o problemas existentes, así como instrucciones o información proveniente de la SEP.

Esta escuela brindaba, al menos hasta la fecha de esta investigación, una serie de facilidades de acceso a grupos de prácticas e investigadores de la Facultad de Psicología de la UNAM, y sus autoridades mostraban disposición e interés por nuestro estudio.

Participantes

Participaron dos profesores y sus respectivos grupos de alumnos de primer y segundo grado de primaria de dicha escuela pública, de los que se seleccionaron por grado cuatro niños de bajo y otros cuatro de alto rendimiento, para la evaluación y análisis de su conocimiento matemático; los grupos se integraban con 32 y 25 niños y niñas respectivamente, con edades comprendidas entre 6 y 8 años.

La elección de los participantes fue de tipo intencional y en gran medida estuvo en función de la disponibilidad de los docentes para trabajar con ellos y con sus grupos de estudiantes.

La maestra que imparte el primer grado nació y ha vivido hasta ahora en el Distrito Federal, actualmente tiene 47 años. En cuanto a su formación profesional, estudió la Normal Básica, ha trabajado como maestra de primaria durante 21 años, por las mañanas da clases y por las tardes se dedica a las actividades de su hogar. Considera que su formación profesional en la enseñanza de las matemáticas inició a partir de sus estudios de primaria y de manera formal cuando llevó un curso de matemáticas en la Escuela Normal con duración de un año y durante todo el ciclo escolar con duración de una hora diaria.

El maestro de segundo grado nació en el ciudad de Monterrey, actualmente tiene 25 años. En cuanto a su formación profesional, comenta que estudió la normal básica, ha trabajado en educación primaria durante dos años y tres meses, por las mañanas se dedica a dar clases y por las tardes estudia una licenciatura en educación secundaria con la especialidad en matemáticas, sin realizar alguna otra actividad profesional o de otro tipo.

En cuanto al grupo de primer grado, participaron 32 alumnos en total, entre niños y niñas que asistían regularmente a clases, sus edades oscilaron entre los 6 y 7 años. En el grupo de segundo grado participaron 25 niños y niñas, cuyas edades promedio fueron entre los 7 y 8 años (Tabla 14).

La participación de los grupos en su totalidad ocurrió únicamente en la fase del análisis del contrato didáctico, es decir, durante la videograbación de algunas sesiones de clase. Por otro lado, como se verá más adelante, se realizaron algunos análisis casuísticos del conocimiento matemático de los niños, por lo que se seleccionó una muestra pequeña entre los grupos de ambos grados. En la selección intencional (Olabuénaga, 1999) de esta muestra pequeña para el análisis del conocimiento matemático, se tomó por cada grado una muestra de 8 alumnos, de los cuales 4 de ellos mostraban bajo rendimiento y otros 4 alto rendimiento académico en matemáticas. Para la elección de estos participantes, se le pidió a los docentes que eligieran a los niños o niñas en función de su desempeño académico en la materia, por lo cual los docentes realizaron la selección con base a los resultados de sus evaluaciones al inicio del ciclo escolar (Tabla 14). Se pidió que fueran alumnos con diferente nivel de

aprovechamiento académico con la finalidad de observar las posibles variaciones en el aprendizaje logrado respecto a los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) bajo estudio.

Tabla 14. Distribución de participantes en la investigación

GRADOS	TOTAL DE ALUMNOS	ALUMNOS DE ALTO RENDIMIENTO	ALUMNOS DE BAJO RENDIMIENTO	MAESTROS
1ro.	32	4	4	1
2do.	25	4	4	1
Total	*57*	*8*	*8*	*2*

5.6 Delimitación conceptual del objeto de estudio

Conocimientos conceptuales y procedimentales de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos

Para los fines de esta investigación, el *conocimiento conceptual* puede definirse como el conocimiento y la comprensión que tiene el niño acerca del significado de los conceptos implicados en la suma y la resta, y el empleo de sus algoritmos correspondientes aplicados a la solución de problemas. El conocimiento conceptual y algorítmico comprende conceptos numéricos y principios matemáticos como la asociación, la conmutatividad, la adición, la sustracción, etcétera así como la comprensión de la composición aditiva del número y la operatividad del sistema decimal. El conocimiento conceptual puede reflejarse, en el momento en que el niño intenta solucionar un problema, por la forma de comprender la posible relación que se establece entre las variables que forman un problema planteado con diferentes niveles de complejidad (Carpenter *et al,* 1999; Nunes y Bryant, 1997). Es decir, el conocimiento conceptual abarca el entendimiento de los significados subyacentes a la adición y la sustracción y las situaciones con que éstas se relacionan.

El conocimiento procedimental supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones de las que se obtiene el resultado acorde a un objetivo concreto. Tradicionalmente se distinguen en el área de las matemáticas dos grandes tipos de procedimientos: los algorítmicos y los heurísticos. Mientras que los primeros llevan a una solución adecuada si se siguen todos los pasos prescritos, los segundos no garantizan una solución correcta, pero guían el proceso para llegar a ella (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001). El conocimiento procedimental, en esta investigación, se refiere al conjunto de estrategias, que incluye recursos cognoscitivos o materiales que el niño puede utilizar en el momento de solucionar un problema y los mismos algoritmos de la suma y la resta. Cabe mencionar que el conocimiento conceptual y procedimental fue indagado en nuestro estudio a través de un instrumento construido ex profeso, basado en el Inventario de Ejecución Académica (Macotela, Bermúdez y Castañeda, 2000), el cual se describe en la sección correspondiente.

Concepciones del profesor acerca de la enseñanza de las matemáticas

En la literatura reportada, las representaciones o concepciones del profesor se han aglutinado bajo el término genérico de "pensamiento del profesor" (Clark y Peterson, 1990; Monroy, 1998), aunque en realidad recogen conceptos y metodologías diversas empleadas en el estudio del conocimiento profesional del profesorado. Thompson en un concepto más amplio al aludir a la noción de sistema de creencias, se refiere a las "concepciones de los maestros, vistas como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, normas, imágenes mentales, preferencias y situaciones semejantes".

Por su parte, ya hemos visto que Monroy y Díaz (2004), destacan que el pensamiento pedagógico del docente es un marco de referencia que integra un conjunto de teorías implícitas, creencias, expectativas, nociones y valores mediante los cuales el profesor significa, interpreta, decide y actúa en sus actividades educativas. Este conjunto de representaciones pedagógicas ha sido construido personalmente sobre la base de conocimientos pedagógicos históricamente elaborados (pedagogías tradicionales, conductuales, activas, operatorias, constructivas, críticas) y apropiados por medio de la formación docente y de la propia práctica. Las teorías implícitas (reconstrucciones personales) no sólo son un sistema cognitivo como dispositivo epistémico de interpretación de la realidad, sino también como un sistema referente de planificación y de control de la acción, no se reducen por lo tanto a un mero ejercicio intelectual, sino son parte de la actividad vital para interactuar con el medio.

Este tipo de estudios sobre las representaciones, creencias, expectativas y valores de los docentes ha tenido una orientación hacia la investigación educativa, pero también es una metodología

utilizada para reflexionar sobre el pensamiento pedagógico de los profesores, con la intención de evaluar las representaciones de sus actividades académicas. El análisis de las teorías y creencias docentes es una alternativa para pensar cómo conciben ellos el pensamiento pedagógico en diferentes momentos de su quehacer educativo. Antes de iniciar las actividades docentes, el análisis del pensamiento docente brinda información acerca de la manera como el profesor se representa la práctica educativa que ejercerá con sus alumnos. Durante la acción educativa, la evaluación del pensamiento pedagógico del profesor proporciona datos sobre cómo y con base en qué, elabora juicios y toma decisiones durante su intervención en los procesos de enseñanza y aprendizaje; cuando el profesor culmina una etapa de trabajo, permite observar cómo percibe la experiencia de su actividad, qué habrá de cambiar, qué habrá de desechar o enriquecer para que en futuras actuaciones educativas prevea resultados más afortunados.

En conclusión, se adopta el término *concepciones* derivado de la definición antes citada de Thompson (1992), considerando que el término incluye el resto, aludiendo que de la literatura revisada para fines de esta investigación fue el que más se adaptó, ya que incluye en su definición al conjunto de creencias y representaciones que el docente puede tener acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, en el marco anterior se concibe que durante las entrevistas realizadas en esta investigación, las respuestas de los maestros revelen o expresen sus concepciones, y en esas concepciones se incluyan al mismo tiempo la expresión de sus creencias y de su pensamiento docente. De esta forma, en esta parte de la investigación se asume que todo cuanto logren expresar en su discurso los maestros será considerado como *las concepciones de los maestros,* que ayudarán a contrastar su actividad en la práctica escolar real, y relacionarlo con el aprendizaje y los conocimientos que el niño tiene y adquiere acerca de los contenidos matemáticos que se analizan en este trabajo.

En esta investigación nos circunscribimos a las *concepciones* que los docentes reportan sobre la enseñanza de las matemáticas, en particular respecto a los contenidos referidos a conceptos y algoritmos para aprender la suma, la resta y la solución de problemas aditivos. Dichas concepciones docentes se exploraron a través de una entrevista semi-estructurada basada en Monroy (1998), enfatizando los *juicios de valor*, el *conocimiento experiencial* y las *propuestas para enseñar y evaluar* por parte del docente. Las dimensiones estudiadas mediante dicha entrevista son las que se señalan a continuación (Tabla 15).

Tabla 15. Concepciones docentes sobre la enseñanza de las matemáticas

CONCEPCIONES DEL PROFESOR ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. CATEGORÍAS A EXPLORAR EN LA ENTREVISTA SEMI-ESTRUCTURADA (BASADO EN MONROY, 1998).	Formación previa e interés en la didáctica de la materia.
	Concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas (importancia, ubicación en el currículo, sentido del aprendizaje, tipo de aprendizajes buscados, problemática, etcétera.)
	Concepciones acerca del alumno y de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas.
	Contenidos específicos y aprendizajes más importantes en relación con la suma, la resta y la solución de problemas aditivos
	Métodos/estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos.
	Evaluación del aprendizaje.

Contrato didáctico

En términos de la teoría de Brousseau, ya vimos que el *contrato didáctico* "es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica. Esto es la justificación que el maestro tiene para presentar su situación. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, y entonces permite que surjan nuevas situaciones. En la misma forma, es el conocimiento expresado por las reglas de la situación a-didáctica y por las estrategias. La evolución de estas estrategias requiere producción de conocimiento, que en su paso permite el diseño de una nueva situación a-didáctica. El contrato didáctico no es un contrato pedagógico general. Éste depende estrechamente del conocimiento específico en juego" (Brousseau, 1997).

En síntesis y de acuerdo con Brousseau (2000), se puede definir el contrato didáctico como el conjunto de obligaciones recíprocas entre alumnos y profesores, las posibilidades de intervención, de devolución de la parte a-didáctica de las situaciones y de la institucionalización. Un contrato didáctico puede ser perecedero de acuerdo con las necesidades o cambios de la actividad didáctica, por ello en el transcurso de la clase pueden presentarse varios tipos de contratos que se sintetizan en el cuadro siguiente (Tabla 16).

Tabla 16. Tipos de contrato didáctico según Brousseau

TIPO DE CONTRATO	Sub-categorías de contrato
NO DIDÁCTICOS	Emisión
	Comunicación
	Experto
LIGERAMENTE DIDÁCTICOS	Información
	Utilización de conocimientos
	Aplicación y control
FUERTEMENTE DIDÁCTICOS	Reproducción formal
	Condicionamiento
	Mayéutica socrática
	Trabajo empirista
	Ostensión
	Constructivistas
	Transformación de saberes previos

Un contrato didáctico transcurre a lo largo de una secuencia didáctica, por lo que se le puede considerar como la unidad básica de observación, análisis e interpretación en esta parte de la investigación.

Una secuencia didáctica se puede definir como el conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos, que tienen un principio y un final conocidos tanto por el profesor como por el alumnado (Zabala, 2000). También se define como un proceso completo de la enseñanza en miniatura, es decir, como el proceso mínimo de enseñanza y aprendizaje que incluye todos los componentes propios de este proceso (objetivos, materiales, actividades de enseñanza, actividades de aprendizaje y evaluación) y en el que es posible identificar un principio y un final (Coll, Colomina, Onrubia y Rochera, 1992). En esta investigación, la exploración del tipo de contrato didáctico presente en las clases de los profesores se realizó mediante el análisis de las secuencias didácticas filmadas en el aula, buscando identificar los tipos de contrato antes mencionados.

5.7 Estrategia metodológica e instrumentos

En relación a la estrategia metodológica de esta investigación, en la Tabla 17 se muestra el tipo de participante, la dimensión bajo estudio, la categoría básica a indagar y la estrategia metodológica y/o el tipo de instrumento que se utilizó para la recolección y análisis de la información o datos necesarios para esta investigación. Se indican asimismo los autores que se tomaron como referentes teóricos y para el diseño de los instrumentos. Este esquema nos permite dar una visión de conjunto antes de pasar a una explicación más detallada de cómo se condujo la investigación.

Tabla 17. Dimensiones, categorías y estrategia metodológica e instrumentos

PARTICI-PANTE	DIMENSIONES	CATEGORÍAS	INSTRUMENTO Y/O ESTRATEGIA
Profesor	Concepciones docentes	• Formación previa en didáctica de cada materia • Enseñanza de las matemáticas • Métodos /Estrategias didácticas • Contenidos y aprendizajes más importantes para la suma, la resta y la solución de problemas aditivos • El alumno y su aprendizaje • Evaluación del aprendizaje	Entrevista semiestructurada acerca de las concepciones de enseñanza docente; basado en Monroy (1998)
Alumnos	Adquisición del conocimiento matemático	• Conocimientos matemáticos previos: conteo, numeración y sistema decimal • Conceptos y algoritmos de la suma y la resta • Solución de problemas aditivos	Prueba de conocimientos matemáticos construida y validada por el autor, con base en Nunes y Bryant (1997), y en Carpenter, Fennema, Franke, Lev y Empson (1999).
Profesor-alumnos	Tipo de contrato didáctico	• No didácticos • Ligeramente didácticos • Fuertemente didácticos	Análisis del tipo de contrato didáctico mediante observación no participante, con base en Brousseau (1999, 2001) y Ávila (2001a, 2001b).

Diseño de instrumentos y entrevistas

Diseño de un instrumento para medir y evaluar el conocimiento matemático.

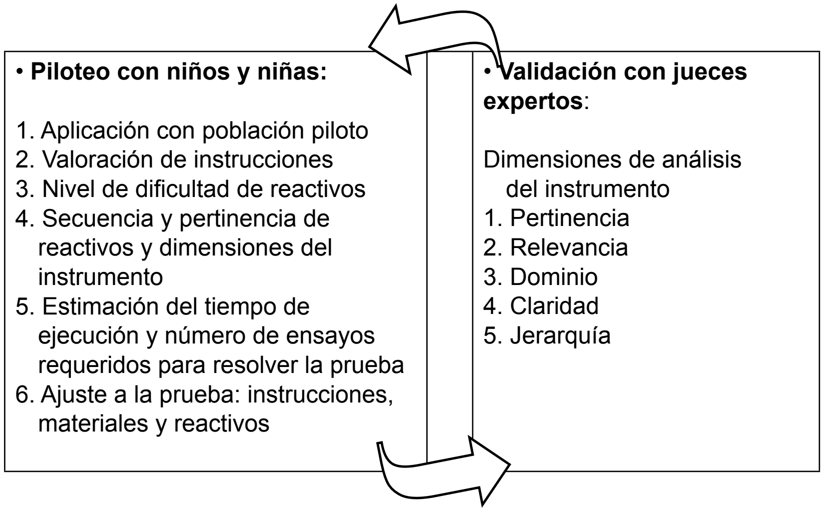
Como uno de los primeros pasos en la realización de esta investigación, se procedió a construir de la "Prueba de evaluación de conocimientos matemáticos previos, suma, resta y solución de problemas aditivos".

Los conocimientos matemáticos se centraron específicamente en dos aspectos: los conocimientos previos (numeración y conteo, sistema numérico decimal) y los conocimientos matemáticos de interés en esta investigación: conceptos y algoritmos de la suma y la resta, solución de problemas aditivos (basado en SEP, 1993; Nunes y Bryant, 1997; Carpenter *et al*, 1999). En principio, se realizó un análisis de la teoría relacionada, se consultaron otros instrumentos, como el Instrumento de Ejecución Matemática (Macotela, Bermúdez y Castañeda, 2000) y pruebas informales que los maestros del grado empleaban. Se construyeron y respaldaron teóricamente los constructos o dimensiones, se procedió a la elaboración de las categorías y sus respectivos reactivos o tareas, se piloteó y se realizó una validación inter-jueces. Finalmente, se hicieron los ajustes sugeridos y necesarios para su aplicación a los participantes en el estudio[2].

Durante el proceso de piloteo se asistió a la escuela primaria, se aplicó la prueba a niños y niñas de rendimiento promedio, se observó cómo respondían y la efectividad del reactivo, se realizaron las anotaciones necesarias para posteriormente regresar a analizar las respuestas de los niños y plantear las modificaciones pertinentes. Se prepararon las observaciones de la aplicación para reportarlo y discutirlo con el equipo de jueces y tomar las decisiones procedentes. Posteriormente se realizaron los ajustes y cambios pertinentes para regresar, en varias ocasiones, nuevamente a probar los reactivos modificados. La figura 2 ilustra el ciclo y el proceso de piloteo con los niños y su validación con jueces.

[2] La construcción de este instrumento fue apoyada por la Dra. Sandra Castañeda Figueras, dado que su elaboración se realizó durante los seminarios doctorales que el investigador tomó con la misma. La metodología de construcción, validación y piloteo fue sugerida y supervisada por la Dra. Castañeda. En la sección de resultados se dan a conocer en detalle el procedimiento seguido y los resultados obtenidos.

Figura 2. **Esquema del proceso de piloteo y validación de los reactivos de la Prueba de Evaluación de Conocimientos Matemáticos**



Diseño de entrevistas
Se diseñaron dos entrevistas, una para los alumnos (Ginsburg, 1997; García, 2002) y otra para los maestros (basada en Monroy, 1998).
1. *Para los niños*. Consistió en una entrevista abierta que se realizó en el momento en que el niño resolvía las tareas o reactivos contenidos en el instrumento de conocimientos matemáticos, aplicada durante el estudio piloto. El investigador planteaba preguntas pertinentes conforme dicha aplicación transcurría, con el propósito de detectar qué sabía el niño, cómo lo sabía, cuál era su posición, dudas, actitudes, etcétera ante los diferentes contenidos de dicho instrumento. Esto con la finalidad de saber las justificaciones y el tipo de conocimiento matemático que el niño podía proyectar o expresar en sus respuestas, específicamente para cada tarea y categoría del instrumento de evaluación. La aplicación de este instrumento permitiría detectar sus conceptos y procedimientos, relacionados con los algoritmos de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.
2. *Para los maestros.* Relativa a las concepciones docentes sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; las dimensiones a explorar fueron las planteadas con antelación en la tabla 4 y la sección respectiva. El proceso para su validación consistió en una aplicación piloto a dos maestros, uno de primer grado y una maestra de segundo grado, que fueron profesores que no se integraron al estudio definitivo.

Instrumento para tipificar los contratos didácticos
Con base en la literatura revisada, se elaboró un cuadro guía del tipo de contratos didácticos planteados por Brousseau (Anexo 1), a fin de identificar y caracterizar el contrato didáctico que se desarrollaba en las clases específicas que fueron filmadas en esta investigación (Tabla 16). Las características descritas en cada tipo de contrato se contrastaban con la transcripción de lo ocurrido en los episodios de enseñanza-aprendizaje en el aula y, cuando era posible, se confrontaban con el discurso del profesor durante la entrevista. Al mismo tiempo, se consultó a Lemke (1997) para poder caracterizar la secuencia didáctica en su conjunto.

5.8 Procedimiento

Aplicación de entrevistas e instrumentos a los niños
Una vez que el profesor autorizó y designó a los niños, así como la misma aceptación por parte del niño o niña, se procedió a aplicarle el instrumento de conocimiento de dominio y la entrevista respectiva. Es necesario señalar que durante la aplicación del instrumento de dominio también se aplicó la entrevista acerca de la ejecución que realizó el niño en el momento: por ejemplo, si el niño resolvía una operación, una vez que había concluido, se le entrevistaba acerca de cómo lo había hecho, qué entendía por suma o resta, o cuál fue la secuencia que realizó. Otro ejemplo puede ser cuando el niño resolvía un problema y una vez que concluía su solución se le entrevistaba acerca de la forma en que lo había resuelto, así como cuáles eran sus estrategias. De igual forma, el investigador permanecía atento y anotaba cualquier observación importante, que ayudara a explicar el proceso realizado. Esta entrevista también se grabó en videocassette para la posterior transcripción de los segmentos de interés.

Para poder lograr esta aplicación se procedió a elegir un espacio dentro de la escuela donde se dispuso de una mesa y sillas para el niño y el investigador. Se preparó y adaptó la cámara de video filmación en el lugar de trabajo. El investigador tenía a mano el cuadernillo de reactivos, así como hojas para realizar las anotaciones procedentes respecto a la ejecución y las respuestas o incidencias de interés en la entrevista del niño. Por su parte, se aseguró que el niño siempre tuviera un lápiz, hojas blancas y sacapuntas como material de apoyo. El investigador dispuso de un espacio breve de tiempo para establecer confianza y seguridad en el niño; le explicó en qué consistía la actividad y su participación. Una vez logrado este clima de confianza y aceptación, se procedió a la aplicación ya descrita. La aplicación tuvo como finalidad analizar y explorar los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) relativos a la suma y la resta y la solución de problemas aditivos. Es importante señalar que durante la aplicación de los reactivos de la prueba se le dio a cada alumno hasta cuatro oportunidades o intentos para tratar de solucionarla correctamente. De igual forma, el aplicador le proporciono material como semillas, hasta una serie de ayudas que consistían en hacerle preguntas al niño, de dialogar y de buscar explicaciones, con la finalidad de acercarlo a una comprensión y solución del ítem donde presentara dificultad. Los intentos finalizaban cuando se creía que el niño llegaba al esfuerzo máximo o donde el mismo niño refería que desconocía la repuesta; si el niño lograba dar la solución correcta se le marcaba con uno, en caso contrario, con cero de puntuación.

Aplicación de entrevistas a profesores

Una vez que se estableció la cita con el profesor, preferentemente en el momento del recreo o en algún espacio libre, se procedió a aplicarle la entrevista de manera individual. Esto se realizó con la finalidad de explorar y analizar sus principales concepciones y la forma en que realiza la planeación e impartición de la enseñanza de la suma y la resta y la solución de problemas aditivos. Se grabó en audiocassette para su posterior transcripción. Después de la entrevista, se analizó su contenido y si alguna categoría no había sido explorada o cubierto su contenido, se procedía a buscar una cita más para completar los aspectos necesarios.

Video-filmación de sesiones de clase en el aula

Se acordó previamente con los docentes las sesiones en las que pensaban impartir los contenidos matemáticos de interés para nuestro estudio (conceptos y algoritmos de suma y resta, solución de problemas aditivos) y se solicitó su permiso para realizar la grabación de la sesión o sesiones completas.

A partir de los planteamientos de Erikson (1992) en "Microanálisis etnográfico de interacción", se procedió a atender sus sugerencias técnicas para la video-filmación de la siguiente forma. Una vez obtenido el consentimiento del maestro y los alumnos, se procedió a asistir con la cámara al aula regularmente con algunas semanas de anticipación antes de realizar la primera grabación. Se explicó a los niños que se realizarían algunas filmaciones y por curiosidad de los niños se les mostró la cámara, se les filmó y mostró la filmación en algunas ocasiones. Después de varias visitas, cuando se consideró que los niños, su maestra o maestro y el mismo observador ya se habían integrado y adaptado, se procedió a acordar con los maestros las fechas y horarios para filmar las clases.

Con respecto a la disposición del equipo técnico, ya en el aula durante la video-filmación se dispuso de dos cámaras, una se ubicó al fondo del salón para grabar la clase en general y se colocó un micrófono inalámbrico en el centro del salón de clases. La segunda cámara se utilizó para seguir la actuación y acción del participante, alumno o maestro. Una vez terminada la grabación se rotularon los cassettes con el nombre del docente y grado, el tema de la clase, la fecha y su duración, y se procedió a archivarlos.

Estas video-filmaciones permitieron analizar los tipos de contrato didáctico que ocurren en la relación didáctica entre el profesor y sus alumnos en las clases, para cada uno de los dominios matemáticos de interés. Es importante aclarar que se eligieron intencionalmente sólo los segmentos de interés que mostraban dónde ocurrían de la manera más clara los contratos didácticos.

Análisis de los contenidos curriculares (programas de estudio)

Se consultaron los fundamentos y lineamientos para la enseñanza de cada uno de los contenidos de nuestro interés, que se tienen previstos en los programas oficiales de la materia de Matemáticas para primero y segundo grado. Se tomó como referente al programa de estudios oficial de la SEP y el libro del maestro para los grados respectivos. Esto permitió identificar el tipo y nivel de los aprendizajes buscados, así como su progresión y los ejemplos de actividades o métodos didácticos recomendados a los docentes. Esto nos permitirá comparar en alguna medida lo que prescribe el currículo con lo que en realidad se practica durante las clases video-filmadas. El asunto reviste interés ya que como se revisó en el apartado del marco teórico, el currículo vigente supuestamente se encuentra sustentado en un enfoque pedagógico propio de la didáctica francesa (Vergnaud, Brousseau), y se espera que los docentes privilegien el enfoque basado en la resolución de problemas, a la par que promueven los procesos de construcción del conocimiento y reflexión en los estudiantes.

5.9 Procedimiento de análisis e interpretación de los resultados

Considerando que el presente estudio sigue un método cualitativo-cuantitativo, la estrategia que predomina para el análisis de datos estuvo en ciertos momentos orientada de manera inductiva y en otros de manera deductiva, es decir, siguiendo un método combinado. Se consideró como referente la estrategia de Glaser y Strauss (1967) para la delimitación de dimensiones y categorías de análisis, aclarando que la propuesta de estos autores consiste de cuatro etapas: comparación de los episodios aplicados a cada categoría; integración de categorías y sus propiedades; delimitación de la teoría y su escrito. Cada etapa alcanza un desarrollo que la define como la siguiente hasta lograr escribir la teoría o arribar a una interpretación de lo que se ha indagado. Sin embargo, el foco del análisis no reside siempre en la posibilidad de elaborar explicaciones o construcciones teóricas desde los datos, antes bien, su función principal está en la posibilidad de realizar comparaciones constantes para generar categorías. Este aspecto atrae a la mayoría de los investigadores (Merriam, 1998) y es lo que orienta el presente análisis, pues no se pretende construir una teoría sustantiva, sino más bien aportar a la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas elementales.

En este sentido, a continuación se explica cómo se realizó el análisis y la interpretación de los resultados, considerando cada uno de los instrumentos aplicados. Iniciaremos con la presentación de los resultados del instrumento de conocimientos matemáticos aplicado a los alumnos de manera grupal, para pasar después a los análisis de casos. En otro apartado se presentarán los resultados de la entrevista sobre pensamiento del profesor. Posteriormente, se describe lo que se ha encontrado respecto al análisis de los contratos didácticos en las aulas bajo observación.

1) De los resultados de la prueba de conocimientos matemáticos aplicada a los niños

Se revisaron las pruebas aplicadas en cada grado. Se asignaron puntuaciones de "1" para los reactivos contestados correctamente y "0" para los que fueron incorrectos. Esta calificación fue acompañada con la revisión del video de la aplicación de la prueba al niño, con la finalidad de realizar la anotación de las respuestas o justificaciones que el niño ofrecía a partir de su entrevista, y poder utilizar esta información en momentos necesarios, como fue durante el estudio de caso.

Para obtener la calificación total de la prueba se realizó el conteo por cada área y por el total de la prueba, de este modo, el niño podía obtener una puntuación total máxima de 70 puntos en natural, que corresponde a los 70 reactivos que evalúa la prueba; para facilitar los análisis cuantitativos estas puntuaciones naturales se convirtieron a porcentajes respectivamente. Es importante aclarar que la prueba en la categoría de conocimiento del sistema decimal, específicamente en la subcategoría del tamaño de las unidades, reactivos 19 a 24, éstos se presentaron bajo tres modalidades diferentes, por lo que se evaluaron de tres formas distintas. Por su parte, en la subcategoría del valor posicional, reactivos 25 a 30, se presentaron bajo dos modalidades, por lo que se evaluó cada reactivo dos veces, con lo que al realizar la suma de la puntuación total se obtenía un máximo de 70 puntos (ver tabla 20).

Posterior a la calificación, se procedió a elaborar una matriz de datos en el paquete estadístico SPSS 11 (Pardo y Ruiz, 2002; Pavkov y Pierce, 2003). Se realizó un análisis de las principales medidas descriptivas. Se aplicó un análisis de estadística inferencial, con la prueba U de Mann Whitney para el análisis entre puntuaciones de los subgrupos de bajo y alto rendimiento, y la prueba de Wilcoxon para medidas repetidas entre la primera y segunda evaluación, tanto para primer como para segundo grado. Esto con la finalidad de observar cómo se comportaban los datos de forma grupal y para tomarlo como un referente explicativo más.

Una primera interpretación se basó en los porcentajes obtenidos para cada categoría o dimensión valorada en el instrumento (conocimiento numérico, conocimiento del sistema de numeración decimal, operaciones de suma y resta y solución de problemas aditivos) y de modo global.

Posteriormente, mediante los resultados del análisis estadístico inferencial, se realizó la interpretación con base en los niveles de significancia obtenidos. La Tabla 18 ilustra las posibles combinaciones de análisis realizados.

a) Interpretación de la primera evaluación, por grado y por nivel de rendimiento
b) Interpretación de la segunda evaluación por grado y por nivel de rendimiento
c) Comparación entre la primera y la segunda evaluación intra-grado y por nivel de rendimiento
d) Comparación entre la primera y la segunda evaluación entre grados y por nivel de rendimiento.

Tabla 18. Combinaciones de análisis inferencial por grado, por evaluación, y por tipo de rendimiento.

GRADO	PRE-EVALUACIÓN	POS-EVALUACIÓN	RENDIMIENTO
Primero	❖	❖	Alto
Segundo	❖	❖	Bajo

2) Del análisis del estudio de casos

De los niños participantes, de primero y segundo, se procedió a analizar sus porcentajes de calificación para elegir la prueba de un niño o niña de alto y otro de bajo rendimiento, de éstos se eligió a uno que obtuvo la puntuación menor y a otro con la puntuación mayor.

A partir de la prueba seleccionada, se analizó detalladamente el tipo de respuesta dada para cada reactivo y en cada categoría de conocimiento matemático, considerando la parte verbal, procedimental y estratégica. Se ubicó el conocimiento matemático de cada niño por nivel, considerando una progresión que va desde el desconocimiento, la muestra de conocimientos parciales y el conocimiento completo. Estos niveles son explicados ampliamente en la sección correspondiente.

Los resultados encontrados en cada uno de los casos se contrastan con lo que plantea el programa de la SEP, con los planteamientos que desde los resultados de otras investigaciones se hacen acerca del número (Gelman y Gallistel, 1978), el sistema decimal, algoritmos de suma y resta, la solución de problemas aditivos (Nunes y Bryant, 1997; Carpenter *et al*, 1999; Flores, 2002), entre otros autores.

Finalmente, de manera general y con base en los resultados encontrados en el instrumento para niños, se determinaron los principales conocimientos que éstos desarrollan, y al mismo tiempo se analizaron y categorizaron sus respuestas en términos conceptuales y estratégicos. Para ello se considera el dominio matemático y el grado correspondiente.

3) Del análisis de las concepciones de los maestros

Obtenidas las entrevistas, se procedió a su transcripción textual, se analizó su contenido escrito, y se procedió a ubicar los segmentos o partes de los textos que correspondían o se relacionaban con las categorías a investigar, tomando como referente a Monroy (1998), cuidando que éstas fueran mutuamente excluyentes en lo posible.

Posteriormente, para la interpretación de estas concepciones, se seleccionaron únicamente los segmentos considerados como los más representativos o cercanos a cada una de las categorías y se contrastaron las concepciones de los docentes con las propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas de la SEP, el libro del maestro de cada grado y los referentes teóricos como Cruz y Pozo (2003) y Martínez y Gorgorió (2004) entre otros, enfatizando los *juicios de valor*, el *conocimiento experiencial* y las *propuestas para enseñar y evaluar el conocimiento matemático* por parte del docente.

4) Del análisis de las secuencias didácticas o clases

Considerando el concepto de contrato didáctico de Brousseau (1997), se utilizó la video-filmación de secuencias didácticas para analizar principalmente los tipos de contrato que se dan en el aula, tomando en consideración las obligaciones recíprocas entre los alumnos y el profesor. En la Tabla 16 aparece una síntesis de la clasificación de tipos de contrato didáctico, la cual guió la identificación de los mismos, teniendo como fuente de información las videograbaciones referidas, así como las respuestas dadas en algunas de las entrevistas respectivas a profesores y alumnos.

1. Se filmaron cuatro clases por cada uno de los dos maestros. Las fases de análisis del tipo de contrato didáctico siguieron el orden siguiente. En este orden, a partir de los registros de las clases se hizo una selección y un recorte de los datos de acuerdo con los siguientes criterios.

2. La primera fase del análisis consistió en realizar la edición del cassette. Posteriormente se revisaron los videos de las clases, teniendo a la mano el cuadro (Anexo 1) con las características de los principales contratos, para poder ubicar los segmentos de la clase que se consideraron representativos de algún tipo de contrato didáctico.
3. Ubicados los segmentos en el video donde ocurrían los tipos de contratos didácticos, se procedió a la transcripción textual de los segmentos.
4. Por segunda ocasión se procedió a analizar ahora en el texto, tratando de ubicar de manera más precisa el contenido del texto y el discurso para reubicar o constatar el tipo de contrato, en caso de alguna duda se repetía la revisión del video y de su texto, tantas veces como fuera necesario.
5. Como era de esperarse, durante el desarrollo de la situación didáctica surgieron diferentes tipos de contratos, independientemente de que cambiara el objeto o tema de estudio, por lo que se localizaron en la secuencia didáctica completa de cada clase los cambios de contrato didáctico, así como la ubicación correspondiente de los episodios o segmentos de mayor interés.
6. Así como se localizaron los segmentos de interés, se realizó otro tipo de reducción de los registros de los textos, donde en ocasiones se redujo exclusivamente al segmento del discurso donde se explicita el manejo del contenido matemático (Ávila, 2001a) de interés.
7. Como una forma de validar la localización y la ubicación del tipo de contrato, se consultó de manera informal la localización con otros colegas.
8. Por último, para la interpretación de los tipos de contrato se insertaron los textos más representativos y se cotejó con la teoría lo que ocurrió en clase, considerando las acciones del maestro y de los alumnos, así como lo propuesto por la teoría (Brousseau, 1997, 2000; Ávila, 2001a, 2001b).

Finalmente, en una triangulación metodológica (Stake, 1998) para validar los resultados encontrados, se contrastaron los resultados obtenidos en la prueba de conocimientos matemáticos aplicada a los alumnos, las entrevistas sobre las concepciones de los docentes y la observación de los videos de las clases, que de igual forma permitió poder apreciar la correspondencia o incongruencia entre los planteamientos de los programas y las características de la práctica educativa de los docentes.

5.9. 1 Validación por jueces de la Prueba de Evaluación del Conocimiento Matemático

Cabe aclarar que el diseño de la construcción de esta Prueba de Evaluación de Conocimientos Matemáticos responde al hecho de que no se encontró otra prueba que evaluara específicamente las categorías, y en conjunto el conocimiento matemático, como se evalúa con esta prueba (tabla 20), que se diseñó para los fines de esta investigación.

De este modo, los resultados siguientes (Tabla 19) corresponden a la validación de la tercera y última versión de la prueba que se utilizó para evaluar el conocimiento matemático del niño, después de ser sometida a un proceso de diseño, piloteo, validación por acuerdo entre jueces expertos en la materia, y la realización de los ajustes pertinentes.

En la siguiente tabla se presentan los niveles de concordancia entre jueces, siendo significativa la correlación entre los jueces en los cuatro constructos y el total de la prueba, lo que significa un alto nivel de acuerdo entre éstos acerca de la viabilidad y posibilidad de aplicar la prueba, considerando los distintos constructos, para evaluar y medir los conocimientos matemáticos de los niños.

Tabla 19. Correlaciones entre jueces por constructo y el total de acuerdo general, de la prueba de Evaluación del Conocimiento Matemático, sin reactivos eliminados

CONSTRUCTO	Jueces	Reactivos	W de Kendall	Significancia
1. Conocimiento numérico	5	1-8=8	.644	.000*
2. Conocimiento del sistema decimal	5	13-20=8	.758	.000*
3. Operaciones de suma y resta	5	25-40=16	.878	.000*
4. Solución de problemas aditivos	5	41-46=6	.885	.000*
Total de los cuatro constructos	5	38	.440	.000*

*= $p < 0.000$

En la Tabla 19, las correlaciones más altas fueron para los reactivos de las secciones de solución de problemas aditivos y operaciones de suma y resta. No obstante, el nivel de correlación también puede considerarse bastante aceptable para los reactivos contenidos en los constructos del conocimiento numérico y conocimiento del sistema decimal, los cuales presentaron mayor dificultad; sin embargo, después del proceso descrito en el procedimiento, se logró mejorar la calidad y pertinencia de los reactivos finales.

Se debe tomar en consideración que la ligera correlación para los reactivos de los constructos conocimiento numérico y del sistema decimal, posiblemente se debió al diseño y planteamiento inadecuado de los reactivos, que presentaban la más baja puntuación de acuerdo entre jueces, situación que queda demostrada al eliminar esos reactivos y observar que en un tercer análisis el nivel de concordancia prácticamente se duplica. De esta forma, la tabla 20 presenta los reactivos que integran las categorías y subcategorías de la prueba final, aplicada durante la primera y segunda evaluación a la muestra definitiva de esta investigación.

Tabla 20. Tercera y definitiva versión de la Prueba de Evaluación del Conocimiento Matemático

Constructo	Sub-categorías	Reactivos	Total de reactivos
I. Conocimiento numérico	Principio de cardinalidad	1, 2, 3, 4 y (igualación de conjuntos) 5	5
	Reconocimiento de representación simbólica del número	6,7,8,9,10,11	6
	Escritura de números	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18	7
II. Sistema decimal de numeración	Tamaño de las unidades: a) Conocimiento formal b) Conocimiento cotidiano o informal c) Conocimiento con material	19, 20, 21, 22, 23, 24	18
	Valor posicional: a) Valor de lugar b) Representación con material	25, 26, 27, 28, 29,30	12
III. Operaciones	Sumas sin integración	31, 32, 33, 34	4
	Sumas con integración	35, 36, 37, 38	4
	Restas sin descomposición	39, 40, 41, 42	4
	Restas con descomposición	43, 44, 45, 46	4
IV. Solución de problemas aditivos	Problemas de cambio	47, 48	2
	Problemas de igualación y combinación	49, 50	2
	Problemas de comparación	51, 52	2
Total de reactivos			**70**

De esta manera, los juicios de los expertos y el análisis de concordancia con la prueba de W de Kendall para muestras relacionadas (Siegel y Castellán, 2001; Pardo y Ruiz, 2002), nos permiten evaluar confiablemente con la Prueba para Evaluar el Conocimiento Matemático.

Una vez presentada la metodología y la manera en que se abordó el objeto de estudio, se presentan los resultados grupales de la evaluación del conocimiento de los niños para primer y segundo grado de alto y bajo rendimiento, resultados de los análisis de los alumnos que representan los estudios de caso de un niño de bajo rendimiento y otro de alto rendimiento para cada grado, resultados del análisis de las concepciones de los maestros, resultados del análisis de los contratos didácticos y finalmente la triangulación de estos resultados para cada grado.

CAPÍTULO 6

Resultados

A continuación se presenta el análisis de las dos evaluaciones de niños y niñas, de alto y bajo rendimiento en conocimiento matemático, de primero y segundo grado.

6.1 Resultados en términos porcentuales de la primera y segunda evaluación

El siguiente análisis de datos se realizó de forma individual y grupal con los porcentajes obtenidos por los alumnos de alto y bajo rendimiento, de primer y segundo grado. La primera evaluación fue realizada entre septiembre y octubre del 2004, y la segunda entre mayo y junio del 2005. En algunas ocasiones se comparan los resultados más importantes entre los alumnos o entre los grupos.

Resultados de la primera evaluación de los niños y niñas de primero y segundo grado

Los porcentajes obtenidos en la primera evaluación son más favorables para el grupo de segundo grado y dentro de éste para los alumnos de alto rendimiento.

Otro dato importante en la primera evaluación es que los dos grupos presentaron dificultades o desconocimiento en el dominio del sistema decimal y en solución de operaciones de suma y resta. Sin embargo, los alumnos lograron resolver problemas aditivos con sus propios recursos o conocimientos matemáticos (estrategias propias o inventadas), sin necesidad de emplear los algoritmos escolares formales. Esto permitió corroborar el supuesto de que los niños, además de adquirir conocimientos derivados de la educación formal, cuentan con sus propios conocimientos matemáticos previos, que incluyen una serie de estrategias y heurísticos (Carraher *et al*; Jordan y Montani; Onrubia *et al*), que pueden emplear efectivamente en la solución de problemas aditivos, como fueron los planteados en esta investigación tal como se muestran más adelante en los resultados de los estudios de casos.

De manera general, en la primera evaluación se observa un bajo rendimiento en todas las categorías, en ambos grados, con mayor dificultad en el conocimiento del sistema decimal y la solución de operaciones de resta y suma. También se observa bajo rendimiento en solución de problemas aditivos y conocimiento numérico, aun cuando este último resulta ser el constructo donde obtuvieron mejores puntajes. Las puntuaciones más bajas son para los alumnos de bajo rendimiento de primero y segundo grado y en general más bajas para los alumnos de primer grado.

Se observa que la mayoría de los alumnos de primer grado tienen nulo o escaso conocimiento del sistema decimal. En segundo grado los alumnos muestran cierto conocimiento, aunque la mayoría obtiene porcentajes por debajo del 50%.

En cuanto a la solución de operaciones de resta en primer grado, se observa dificultad o escaso conocimiento al obtener la mayoría de los alumnos porcentajes iguales o menores del 25%. En tanto que en segundo grado su conocimiento es mejor al obtener porcentajes similares al primer grado, a excepción de un niño de alto y otro de bajo rendimiento que obtienen un 50%.

En operaciones de suma, en primer grado también se observa dificultad en este conocimiento para la mayoría de los alumnos, al obtener porcentajes por debajo del 25% a excepción de una niña que obtiene 37%. Este conocimiento es mejor en los alumnos de segundo grado, al obtener la mayoría porcentajes igual o menor al 50%, a excepción de un niño de alto rendimiento que obtiene el 100%.

En conocimiento numérico fue donde ambos grados obtuvieron sus mejores porcentajes, en primer grado la mayoría se ubica entre 50% y 61%, y en segundo grado entre 66% y 77%, a excepción de una niña y un niño de alto rendimiento que logran 94% y 100% respectivamente. No obstante, se observa que los porcentajes en el conocimiento numérico en los alumnos de segundo grado comienzan a ser mejores a favor de los de alto rendimiento, sin llegar a igualarse, como ocurrió en algunos casos del primer grado.

La solución de problemas aditivos fue la segunda área donde los alumnos de ambos grados obtuvieron sus mejores porcentajes, siendo mayores para los grupos de alto rendimiento. Curiosamente, los alumnos de segundo grado de bajo rendimiento obtienen porcentajes semejantes a los de alto rendimiento de primer grado, lo que indicaría un nivel de conocimiento matemático similar entre éstos.

Finalmente, en el total de la puntuación obtenida se observan porcentajes bajos en ambos grupos, en primer grado entre 17% y 32%, en segundo grado entre 28% y 60%. Se observan porcentajes ascendentes en la mayoría de los casos, en función del grado y los niveles de rendimiento, es decir, las puntuaciones más altas las logran los alumnos de segundo grado y los alumnos de alto rendimiento.

Resultados de la segunda evaluación de primero y segundo grado
En comparación con los porcentajes previos, en la segunda evaluación de primer grado, la dificultad mayor se encuentra nuevamente en el sistema decimal y en operaciones de resta. En el caso de los alumnos de segundo grado la mayor dificultad también es en operaciones de resta. En cambio, en la resolución de problemas aditivos ambos grupos lograron los porcentajes más altos.

En cuanto al conocimiento del sistema decimal, se observa una mayor dificultad para el grupo de primer grado, al obtener porcentajes por debajo de 56%. El grupo de segundo grado logra avances significativos, al obtener la mayoría de los alumnos puntuaciones altas, incluso hasta de 100%. En ambos grados los alumnos de bajo rendimiento obtienen los porcentajes menores. Sin embargo algunos de estos alumnos llegan a superar o igualar a los de alto rendimiento.

En esta segunda evaluación, en el grupo de segundo grado, seis de ocho alumnos lograron cubrir al 100% la categoría del conocimiento del sistema decimal. Este es un avance considerable en relación a la primera evaluación. Otra dificultad que se muestra en los alumnos de primer grado es la solución de operaciones de suma al obtener puntuaciones menores o iguales a 75%. A su vez, los alumnos de segundo grado en su mayoría logran el 100%, a excepción de dos alumnos de bajo rendimiento.

En esta segunda evaluación, en la solución de problemas aditivos, la mayoría de los alumnos de ambos grupos logra mejores porcentajes. Específicamente, en segundo grado siete de los ocho niños logró el 100%, y tres niños de primer grado alcanzan esta misma puntuación. En la solución de problemas aditivos, en los alumnos de primer grado y dentro de ellos, los de bajo rendimiento, obtienen las puntuaciones más bajas, a excepción de una niña que logra el 100%.

Finalmente, en el total de la prueba, los porcentajes más bajos son para los alumnos de primer grado, y dentro de ellos los más bajos corresponden a los alumnos de bajo rendimiento, en tanto

que los alumnos de segundo grado obtienen porcentajes más altos, como era de esperarse.

Dos alumnos de alto y dos de bajo rendimiento cambian de nivel de clasificación inicial. Los cuatro participantes de alto rendimiento obtienen porcentajes altos que van del 94% al 100% en el total de la prueba, situación que los hace mantenerse en las puntuaciones máximas, tanto en la primera evaluación como en la segunda.

Estos resultados permiten establecer un punto de partida que servirá más adelante para analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos conocimientos matemáticos, específicamente en las categorías incluidas en la evaluación, así como un referente que se relaciona con las concepciones de los maestros acerca de este proceso, y su relación con la práctica educativa, además de la actuación de los agentes escolares involucrados, que se describe al final de este trabajo.

6.2. Análisis estadístico de los resultados de primer grado en la segunda evaluación.

De acuerdo con los resultados de la primera evaluación en el primer grado, como era de esperarse, el grupo de alto rendimiento presenta una media superior al grupo de bajo rendimiento en todas las categorías y en el total de la prueba. No obstante, en ambos subgrupos se observan porcentajes bajos en el conocimiento del sistema decimal y la solución de operaciones de resta, constatándose la problemática que se ha encontrado en los análisis anteriores. En conocimiento numérico y resolución de problemas aditivos, ambos subgrupos obtienen sus mejores porcentajes, aunque superiores para el subgrupo de alto rendimiento.

Tabla 21. Análisis estadístico de los resultados de primer grado en la segunda evaluación

Rend.	Categorías	N	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo	Prob.
Bajo	Total conocimiento numérico	4	69.44	16.03	50.00	88.89	.48
Alto			73.61	2.77	72.22	77.78	
Bajo	Total conocimiento sistema numérico decimal		18.33	17.32	3.33	43.33	.11
Alto			47.50	8.76	40.00	56.67	

Rend.	Categorías	N	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo	Prob.
Bajo	Total operaciones de suma		34.37	11.96	25.00	50.00	.02*
Alto			65.62	11.96	50.00	75.00	
Bajo	Total operaciones de resta		28.12	21.34	.00	50.00	.02*
Alto		4	71.87	6.25	62.50	75.00	
Bajo	Total solución de problemas		70.83	20.97	50.00	100.00	.20
Alto			91.66	9.62	83.33	100.00	
Bajo	Total de la prueba		38.92	11.27	25.71	51.43	.02*
Alto			62.85	4.51	57.14	67.14	

* = $p < 0.05$

De acuerdo con los datos de esta tabla, en la segunda evaluación del primer grado, se encuentran diferencias estadísticamente significativas entre los subgrupos de bajo y alto rendimiento, en cuanto a su conocimiento para solucionar operaciones de resta, solucionar operaciones de suma y el total de la prueba, favorables para el subgrupo de alto rendimiento. No se encuentran diferencias en conocimiento numérico, del sistema decimal ni en resolución de problemas.

En cuanto al conocimiento del sistema decimal, nuevamente esta fue la categoría donde los niños presentan mayor problemática, relacionada con la dificultad de los alumnos para comprender y operar correctamente en los ejercicios que implican los principios del valor posicional y la composición aditiva, en donde únicamente reconocen el valor absoluto del número y no el relativo. Esto a pesar de que los programas de la SEP (1993) establecen que al término del ciclo escolar los niños deben haber adquirido este conocimiento hasta las decenas.

Otro resultado importante es que también la solución de operaciones de resta continúa ubicada en las categorías con mayor dificultad. Nuevamente, estas dificultades, están relacionadas con el desconocimiento del valor posicional, la composición aditiva y las reglas formales para aplicar los algoritmos de la suma y la resta que implican una transformación con dos o más dígitos. Los niños y niñas de alto rendimiento sabían mejor cómo "hacer cuentas", pero no poseían un conocimiento conceptual para solucionar mejor los problemas.

En resolución de problemas, tanto el grupo de alto como el de bajo rendimiento obtienen el mismo porcentaje de aciertos, lo que indicaría que el conocimiento de la aplicación de algoritmos de suma y resta es independiente de cómo utilizan los niños de bajo rendimiento estrategias y conocimientos propios para solucionar problemas y que, a pesar de su puntaje más bajo, son capaces de lograr en esta categoría un porcentaje igual que el grupo de alto rendimiento, en la primera evaluación. Se esperaría que el grupo de alto rendimiento, al tener mayor conocimiento en las demás categorías lograra porcentajes mejores al solucionar problemas, ya que ello implica el uso de los algoritmos de la suma y la resta, lo que nuevamente llama a discusión el entendimiento conceptual de estos conocimientos.

Tabla 22. Resultados del primero y segundo grado, del grupo de bajo rendimiento, en la primera y segunda evaluación

Grado	Categorías	N	Media en primera evaluación	Media en segunda evaluación	Nivel signif. Wilcoxon	Ganancia promedio
1ro.	**Conocimiento numérico**	4	50	**69.44**	**.059**	**19.44**
	Sistema decimal		*2.50*	*18.33*	**.066**	*15.83*
	Operaciones de suma		**15.62**	**34.37**	**.066**	**18.75**
	Operaciones de resta		**12.550**	**28.12**	**.066**	*15.62*
	Resolución de problemas		**33.33**	70.83	**.066**	37.5
2do.	**Conocimiento numérico**	4	**54.16**	**81.94**	**.109**	*27.78*
	Sistema decimal		21.66	**72.50**	**.144**	50.84
	Operaciones de suma		**37.50**	**75.00**	**.066**	**37.5**
	Operaciones de resta		21.87	62.50	**.180**	**40.63**
	Resolución de problemas		58.33	91.66	**.066**	**33.33**

En esta tabla destaca que para el grupo de bajo rendimiento de primer grado, la ganancia promedio más alta fue en solución de problemas y la más baja en conocimiento del sistema decimal y operaciones de resta. En tanto que para el segundo grado ocurre lo contrario, la ganancia más alta resultó en el sistema decimal y la solución de operaciones de resta, y la más baja en conocimiento numérico. En tanto que el grupo de bajo rendimiento de primero presenta dificultades en sistema decimal y solución de operaciones de resta, el grupo de bajo rendimiento de segundo grado obtiene su mayor avance en estas áreas. Estos resultados posiblemente se debieron al grado que cursan, al tipo de experiencia y oportunidades educativas que cada uno tuvo a lo largo del año escolar, y a la forma en que cada niño logró estructurar estos conocimientos matemáticos, de acuerdo a sus propias habilidades cognitivas y sus conocimientos previos.

Tabla 23. Resultados del primer y segundo grado, del grupo de alto rendimiento, en la primera y segunda evaluación

Grado	Categorías	N	Media en primera evaluación	Media en segunda evaluación	Nivel signif. Wilcoxon	Ganancia promedio
1ro.	Conocimiento numérico	4	59.72	**73.61**	**.066**	*13.89*
	Sistema decimal		*5.83*	*47.50*	**.068**	**41.67**
	Operaciones de suma		**25.00**	**65.62**	**.063**	**40.62**
	Operaciones de resta	4	**18.75**	**71.87**	**.180**	*53.12*
	Resolución de problemas		58.33	91.66	**.066**	**33.33**
2do.	Conocimiento numérico	4	87.50	100	**.102**	*12.50*
	Sistema decimal		**41.66**	**97.50**	**.066**	55.84
	Operaciones de suma		**56.25**	100	**.102**	**43.75**
	Operaciones de resta		**31.25**	**81.25**	**.066**	50
	Resolución de problemas		58.33	100	**.059**	**41.77**

Entre la primera y segunda evaluación tampoco se encontraron diferencias estadísticamente significativas en los nuños de alto rendimiento de los dos grados. En primer grado, el grupo de alto

rendimiento obtiene la ganancia más alta en solución de operaciones de resta y la más baja en conocimiento numérico. Para el grupo de alto rendimiento de segundo grado, la mayor ganancia la obtienen en sistema decimal y solución de operaciones de resta, en tanto que la más baja corresponde a conocimiento numérico.

Se podría inferir que los avances más bajos en algunas áreas fueron porque los grupos presentaron mayor dificultad o porque ya habían cubierto esas áreas. En los casos en que lograron los mayores adelantos fue porque avanzaron en áreas que al inicio presentaron mayor dificultad, siempre favorables para los subgrupos de alto rendimiento de ambos grados.

Al revisar el proceso de resolución, así como del tipo de respuestas que dan los niños de ambos grupos, se observa que sus dificultades se ubican en el desconocimiento o no entendimiento conceptual y de la operatividad del sistema decimal. Aunado a esto, al igual que en otras investigaciones (García, 2002; García, Jiménez, Flores, 2006), los niños presentan dificultades en la solución y la falta o el uso inadecuado de las reglas de los algoritmos, donde específicamente se les dificulta el entendimiento conceptual y la aplicación de los principios de composición aditiva y del valor posicional (Carpenter *et al*, 1999; Cortina, 1997), así como una comprensión de los conceptos de suma y resta que se reduce a la resolución de problemas aditivos que implican cambio o combinación, y no incluye problemas de mayor complejidad como los de comparación.

Lo anterior contribuye a explicar por qué los niños logran los porcentajes más altos en solución de problemas aditivos, relacionándose directamente con un alto porcentaje en conocimiento numérico. Al respecto, se observa en este proceso que los niños de ambos grados son capaces, tanto en la primera como en la segunda evaluación, de resolver problemas aditivos que impliquen suma o resta con solo tener conocimientos básicos del conteo y de la numeración, a pesar de sus dificultades en el manejo y conocimiento del sistema decimal y de las operaciones de suma y resta. Aquí es donde aparecen los conocimientos matemáticos que tiene cada niño, consistentes en una serie de conocimientos y estrategias que él mismo ha construido sobre el conteo y la numeración (Gelman y Gallistel, 1978), como son comparar o igualar conjuntos numéricos, además de poner en juego sus propios conceptos de adición y sustracción como ”dar” o “quitar”, ”unir” o "separar", considerados como la base de sus primeras nociones para el desarrollo conceptual que llevarán al conocimiento formal de la suma y la resta (Bermejo, Rodríguez, Pérez, 2000).

En el caso de los niños de segundo grado, ya contaban con experiencias y adquisiciones del primer año cursado, y a pesar de sus avances significativos en cada categoría, su conocimiento parece estar más centrado en la solución algorítmica o mecánica de la operación, mas no en la comprensión conceptual. Esta clase de procesos y conocimientos, se explican por la relación estrecha que se establece con los tipos de práctica educativa, los contenidos a los que se dan peso durante las clases, así como de manera muy importante al tipo de relación didáctica que se establece entre los alumnos y su maestro, caracterizado por el tipo de contrato didáctico (Brousseau, 2000, 1997) que tiene lugar en el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de la práctica escolar.

Hasta aquí los resultados presentados, tanto de primer grado como de segundo, permiten constatar la importancia de que el niño ya cuenta con los recursos o conocimientos matemáticos naturales o propios, que ha venido desarrollando y construyendo durante sus experiencias de la vida cotidiana (Carraher y Carraher, Schliemann, 1996) junto con la instrucción que imparte la institución escolar, donde esos conocimientos previos (Fennema *et al*, 1996; Onrubia, Rochera y Barberá, 2001) deben ser considerados por el profesor durante sus clases, al pretender cubrir los contenidos que establecen los programas curriculares.

6.3 Resultados de los análisis de caso

Respecto a las estrategias de solución de los niños, la diferencia entre la primera y la segunda evaluación radica en el tipo de estrategias de conteo, de simples a complejas, ya que estas últimas son empleadas en su mayoría por los niños en la segunda evaluación.

Finalmente, como complemento al análisis anterior, se ofrecen los resultados obtenidos mediante la Rúbrica de Illinois para Matemáticas (Illinois State Board of Education, 2006). Las rúbricas son guías o escalas de evaluación donde se establecen niveles progresivos de dominio o pericia, relativos al desempeño que una persona muestra respecto de un proceso o actividad determinada. Las rúbricas integran un amplio rango de criterios que califican de

modo progresivo el tránsito de un desempeño incipiente o novato al grado de experto.

Son escalas ordinales que constituyen una evaluación del desempeño centrada en aspectos cualitativos, aunque es posible el establecimiento de puntuaciones numéricas. En todo caso, representan una evaluación basada en un amplio rango de criterios más que en una puntuación numérica única. Son instrumentos de evaluación auténtica sobre todo porque sirven para medir el trabajo de los alumnos de acuerdo con "criterios de la vida real" (Díaz Barriga, 2005).

En esta investigación, la evaluación del conocimiento mediante la rúbrica, cuando los niños resuelven problemas matemáticos, permite describir los niveles evolutivos que logran entre la primera y segunda evaluación, que en términos del análisis de estos resultados ofrece una representación global de este proceso de aprendizaje.

Específicamente la Rúbrica de Illinois para Matemáticas (Illinois State Board of Education) evalúa el conocimiento matemático del niño al solucionar problemas aritméticos. Básicamente esta rúbrica permite evaluar el conocimiento de acuerdo con tres categorías (ver Anexo 2).

- La primera, es la *Escala de conocimiento matemático*, que evalúa el nivel de comprensión conceptual que tiene el niño de la suma y la resta.
- La segunda es la *Escala del conocimiento estratégico*, que evalúa las estrategias que el niño emplea durante el proceso de solución, e incluye el conocimiento y uso de los algoritmos de la suma y la resta.
- Finalmente, la *Escala de comunicación del resultado*, se refiere a la capacidad que tiene el niño para reportar su resultado, considerando sus respuestas escritas y justificación verbal en términos matemáticos.

Resultados de la evaluación mediante la Rúbrica de Illinois para Matemáticas (Illinois State Board of Education, grades 3-12).
A continuación se presentan los resultados de la evaluación con la Rúbrica de Illinois para Matemáticas (grados 3-12), para cada una de las tres categorías que evalúa: Conocimiento matemático, Conocimiento estratégico y Comunicación del resultado.

Tabla 24. Resultados de la escala de conocimiento matemático (niveles 0 - 4) de la rúbrica de Illinois

TIPO DE PROBLEMA	PRIMER GRADO				SEGUNDO GRADO			
	Deniz		Karen		Esteban		Michel	
	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos
1	1	3	1	3	2	3	2	3
2	1	3	1	2	2	4	1	2
3	1	3	0	3	4	4	2	3
4	0	3	0	2	0	3	1	3
5	0	3	0	1	2	3	0	1
6	0	3	0	1	0	4	0	2

En la categoría de conocimiento matemático, en la primera evaluación las dos niñas de primer grado se ubican en los niveles 0 y 1, al presentar en los primeros problemas un entendimiento de algunos de los principios y conceptos matemáticos como la adición y la sustracción, con desconocimiento de sus algoritmos, y con limitado entendimiento de la relación establecida en los problemas de igualación y comparación.

En la segunda evaluación este conocimiento mejora en Karen, al ubicarse en los niveles 1 y 3, donde puede aplicar únicamente el algoritmo de la suma. El cambio en Deniz es mayor, al predominar el nivel 3, pues muestra un entendimiento más completo de los principios y conceptos implicados en los primeros tres problemas, aplica los algoritmos de la suma y la resta correctamente (algoritmos sencillos con uno o dos dígitos, que no implican transformación). Sin embargo, se le complica la aplicación de estos conocimientos en el resto de los problemas.

De los niños de segundo grado, en la categoría de conocimiento matemático, en la primera evaluación, Michel se ubica en los niveles 1 y 2, y presenta también limitado entendimiento de los principios y conceptos matemáticos. Puede presentar un uso incorrecto y falla al utilizar conceptos matemáticos, como el uso indistinto de la suma para resolver el problema de cambio con resta. Por su parte Esteban, en la primera evaluación, se ubica en el nivel 2, al presentar entendimiento de algunos de los principios y conceptos; tiene claro en qué momento emplear la adición o la sustracción. Tiene serias dificultades al desconocer el procedimiento de los algoritmos de la suma y resta, en el momento de solucionar un problema. Sin embargo, en la segunda evaluación los dos niños mejoran, las respuestas de Michel predominan en el nivel 2 y 3, presenta un mejor entendimiento de los principios de la suma y la resta y el conteo, pero con serios errores de cómputo, escribe sólo parte de un algoritmo escrito. No obstante, respecto a Esteban, su ubicación predomina entre los niveles 3 o 4, dado que es capaz de presentar un entendimiento más completo de los principios y conceptos analizados en la mayoría de las situaciones. Utiliza apropiadamente la notación y terminología matemática. Aplica correctamente los algoritmos de la suma y la resta con transformación, hasta con tres dígitos.

Sin embargo, de acuerdo con los resultados de la rúbrica, se observa una discrepancia entre el hecho de que los niños puedan aplicar algoritmos y la conceptualización que tienen acerca de su significado y su correcta aplicación al tratar de solucionar los problemas. Aunque el niño conozca y pueda aplicar correctamente los algoritmos, esto no necesariamente implica que entienda el concepto. A la inversa, que el niño pueda resolver problemas no implica que entienda el uso de los algoritmos. Sin embargo, observamos que al comprender o tener nociones de lo que implican la adición y la sustracción, junto con el uso apropiado de sus estrategias y algoritmos naturales, los lleva a resolver exitosamente los problemas. Lo ideal sería aprovechar estos conocimientos que tienen los niños acerca de la adición y la sustracción como base para la enseñanza de los algoritmos.

Lo anterior sirve como justificación del por qué varían los resultados entre el tipo de solución y el nivel logrado en las rúbricas. Por ejemplo, ante una solución tipo III, en la evaluación mediante la rúbrica obtiene calificación 2; la razón es que aun cuando el niño puede dar un resultado correcto, en su procedimiento no demuestra una comprensión de la relación entre las variables, como es el caso de los problemas de comparación, en el que los niños expresan: *"no sé si es suma o es resta"* o dudan en qué algoritmo utilizar: *"una suma o una resta"*, *"no sé cuál es"* , aún cuando puedan llegar a resolver algoritmos correctamente. La razón es que comprenden algunos de los principios y conceptos que solo pueden ser aplicados en problemas de menor complejidad, como de cambio con adición o de combinación.

En relación al conocimiento estratégico cuando resuelven problemas de diferente tipo, los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 25. Resultados de la escala de conocimiento estratégico (niveles 0 - 4) de la rúbrica de Illinois

TIPO DE PROBLEMA	PRIMER GRADO				SEGUNDO GRADO			
	Deniz		Karen		Esteban		Michel	
	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos
1	2	4	2	3	3	4	3	3
2	2	4	2	2	3	4	1	2
3	1	3	1	2	4	4	3	3
4	2	2	1	2	1	2	2	2
5	0	1	0	1	2	3	0	1
6	0	1	0	1	2	4	1	2

Se observa que Karen y Deniz, en la primera evaluación, se ubican entre los niveles 0 y 2, un poco mejor para Deniz. En los dos problemas de cambio las dos niñas logran identificar algunos elementos importantes del problema, pero presentan limitado entendimiento de la relación entre sus variables. Dan alguna evidencia del proceso de solución. Fallan al identificar elementos importantes (datos numéricos, en ocasiones la pregunta) así como al enfatizar elementos sin importancia, reflejan una estrategia deficiente para solucionar el problema. En los últimos dos problemas de comparación dan mínima evidencia de un proceso de solución. El proceso es difícil de identificar, pues no pueden explicar su solución. Karen copia partes del problema, pero sin intentar una solución.

En la segunda evaluación, las niñas mejoran sus estrategias, Karen se ubica entre los niveles 1 y 3, y Deniz entre el 1 y el 4, logran identificar los datos más importantes, pueden establecer la relación entre ellos, el procedimiento de solución es casi correcto; sin embargo, al elevarse el nivel de complejidad dado por las relaciones entre los datos de los problemas, se les dificultan cada vez más.

Por su parte, en los niños de segundo grado en esta categoría del conocimiento estratégico, en la primera evaluación se observa una variación de la efectividad de sus estrategias que los ubica entre los niveles 1 y 3, donde pueden llegar a utilizar información relevante. Fallan en algunas ocasiones para identificar elementos o partes importantes, principalmente en los problemas de igualación y de comparación. Pueden mostrar una estrategia importante para solucionar el problema, como es el uso de dibujos o el empleo de sus dedos. Se les dificulta explicar el procedimiento de solución, sobre todo a Michel, quien sí identifica algunos elementos importantes del problema pero presenta un limitado entendimiento de las relaciones entre las variables.

En la segunda evaluación las diferencias son más claras, Michel se ubica más entre los niveles 2 y 3; en problemas de cambio con adición y de combinación da clara evidencia del procedimiento de solución, no siendo así con el resto de los problemas, principalmente los que implican la resta, como el de cambio con sustracción y los problemas de comparación. Por su parte, Esteban se ubica en los niveles 3 y 4, donde predomina el nivel 4; identifica todos los elementos importantes del problema y presenta un entendimiento de las relaciones entre ellos, incluso en los problemas de comparación. Muestra más una estrategia sistemática y apropiada para solucionar los problemas. Da una clara evidencia del procedimiento de solución, y éste es completo y sistemático, destaca el uso del cálculo mental, el empleo de los dedos y en algunos problemas emplea los algoritmos de la suma y la resta.

Como complemento a lo anterior, también es importante presentar la forma en que los niños llegan a comunicar su conocimiento (tabla siguiente), y las estrategias que emplean para la resolución de los problemas planteados, que ayudan a demostrar el grado de entendimiento que tienen. A continuación se presenta una tabla con estos resultados.

Tabla 26. Resultados de la categoría de comunicación (niveles 0 - 4) de la rúbrica de Illinois

TIPO DE PROBLEMA	PRIMER GRADO				SEGUNDO GRADO			
	Deniz		Karen		Esteban		Michel	
	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.
1	2	2	2	2	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	3	1	3

3	1	2	1	2	3	4	3	3
4	1	1	1	1	2	3	2	3
5	0	1	0	1	2	3	0	2
6	0	1	0	1	2	4	1	2

Finalmente en la tercera categoría, comunicación del resultado, las dos niñas de primer grado logran niveles 1 y 2 en ambas evaluaciones, con una ligera mejoría en la segunda evaluación. De manera general logran dar o no alguna explicación del procedimiento de solución empleado, pero la comunicación es vaga o difícil de interpretar, llegan a incluir un diagrama que es imperfecto, sin claridad, o no explicado. Pueden fallar para completar o pueden omitir partes importantes del problema. Dan una explicación errónea o difícil de presentar, en menor medida para Deniz quien en problemas de menor complejidad puede llegar a explicar el procedimiento de solución.

En la categoría de comunicación del resultado, Michel y Esteban tienden a ubicarse en el nivel 3 en ambas evaluaciones; en problemas que implican la suma, logran explicar el procedimiento de solución empleado, donde pueden incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones. Sin embargo, en problemas que implican resta se ubican desde el nivel 0 hasta niveles 1 y 2, principalmente en los problemas de comparación. Dan una explicación mínima del procedimiento de solución. Pueden fallar u omitir partes importantes del problema. Pueden incluir un diagrama que representa incorrectamente el problema, o este puede no ser claro y difícil de interpretar.

Sin embargo, en la segunda evaluación Michel logra nivel 3, mejora su explicación del procedimiento de solución empleado, y llega a incluir diagramas casi completos con algunas explicaciones. Esteban por su parte, en la segunda evaluación, se ubica en los niveles 3 y 4, con predominio del nivel 3, da bastante explicación del procedimiento de solución empleado. Puede tener algunos huecos menores o partes sin explicar. Puede incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones. En los problemas de combinación que implican resta y el de combinación que implica suma, logra dar una explicación clara del procedimiento para llegar al resultado.

Hasta aquí se han explicado los avances logrados por los miños en la construcción del conocimiento matemático a lo largo del ciclo

escolar. Se ha descrito el proceso que siguen los niños en términos conceptuales y estratégicos, así como sus dificultades y avances en cada categoría evaluada. Sin embargo, es importante analizar los resultados encontrados respecto a la participación del maestro, en términos de cuáles son sus concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, para poder contrastarlas más adelante con los resultados del análisis de las prácticas educativas en el aula.

6.4 Análisis de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En esta sección se presentan los resultados del análisis, para cada una de las seis categorías, de las concepciones de la maestra de primer grado y del maestro de segundo grado. Al final se hace una síntesis comparando y relacionando sus concepciones.

6.4.1 Análisis de las categorías de la entrevista aplicada a la maestra de primer grado

Formación previa e interés en la didáctica de la materia

La maestra que imparte el primer grado de primaria nació y ha vivido hasta ahora en el Distrito Federal, actualmente tiene 47 años de edad. En cuanto a su formación profesional, afirma que estudió la Normal Básica, ha trabajado como maestra de primaria durante 21 años en el turno matutino y por la tarde se dedica a actividades de su hogar. Considera que su formación profesional en la enseñanza de las matemáticas inició a partir de sus estudios de primaria y de manera formal cuando llevó un curso de matemáticas en la Escuela Normal, con duración de una hora diaria, durante un año en todo el ciclo escolar.

Al preguntarle si se basa en alguna teoría o corriente teórica para la enseñanza de las matemáticas, afirmó considerar “todos los métodos que hay” y “más que nada, que al niño se le haga razonar y resolver problemas que se le presentan”.

No aclara a qué se refiere con dichos “métodos” o qué los caracteriza, pero tampoco recuerda con precisión qué fue lo qué aprendió en el curso formal que tomó en algún momento de su preparación como profesora normalista. De acuerdo con lo que menciona, se observa la ausencia de fundamentos teóricos específicos para la enseñanza de las matemáticas, es decir, no se refiere a una didáctica específica de la disciplina fundamentada en alguna corriente o autor identificable. Como lo ilustra el extracto anterior y por otros más en la entrevista, apela a una suerte de aprendizaje experiencial de cómo se aprende y se enseña esta disciplina, que le ha permitido acercarse de manera empírica a plantear su abordaje de la enseñanza en el aula. Más que apelar a una formación profesional, plantea una formación para la enseñanza basada en la práctica y las vivencias como estudiante y como docente.

Esta respuesta coincide con la literatura reportada (Monroy, 1998; Llinares y Sánchez, 1990) respecto a que los profesores no declaran sustentar su enseñanza en alguna teoría, autor o método psicopedagógico determinado, sino que apelan a su experiencia y a su historia personal. Esto trae a discusión algunos de los dilemas más importantes respecto a la actuación docente, si ésta se sustenta en una formación profesional y se vincula a una didáctica disciplinar específica, o más bien se construye de manera artesanal, con base en la experiencia. Sin embargo, se ha establecido que tanto el tipo de conocimientos teóricos y metodológicos que poseen los profesores como sus representaciones, afectan su enseñanza y los procesos de aprendizaje de sus alumnos (ver lo reportado en el capítulo dos de este libro). También se abre otra discusión: qué tanto fue pertinente y suficiente la formación inicial recibida para sustentar la enseñanza de las matemáticas, como en este caso, durante más de dos décadas, y encontrar un referente lejano y poco significativo que podría hablar de la participación en un proceso permanente de formación y actualización docente, que según los especialistas (Imbernón, 1994) es requisito indispensable para el perfeccionamiento y profesionalización de los profesores. Asimismo, Perreneoud (2004) encuentra que para adquirir las competencias que permiten gestionar la progresión de los aprendizajes, los profesores requieren como competencia específica el poder establecer vínculos con las teorías que sostienen las actividades de aprendizaje.

Concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas

Acerca de la importancia de enseñar matemáticas, la maestra considera que ésta reside en el desarrollo de habilidades cognitivas generales, como el razonamiento, y no en el desarrollo de habilidades matemáticas concretas o en la adquisición de contenidos específicos; al respecto afirma que enseñar matemáticas es importante "para que el niño aprenda a razonar en todos los problemas que se le presentan":

A diferencia de lo que reportan otros profesores, quienes consideran que las asignaturas más importantes son Español y Matemáticas, esta maestra concibe que existen materias más importantes como "valores", por lo que las Matemáticas no tienen tanta importancia, y que en ocasiones "se piensa que no sirven para nada".

De acuerdo con estudios realizados, el estatuto o importancia otorgada por los profesores a las distintas materias influye en su conducta durante su práctica educativa (Gill *et al*, 2004), en particular en la calidad de organización del conocimiento a enseñar, el tiempo dedicado a su impartición y la motivación para enseñar, lo que se reflejará en el aprendizaje del niño (Llinares y Sánchez, 1990).

Por otra parte, en cuanto a los tipos de aprendizaje que se deben adquirir en matemáticas, la maestra considera que son: "la lógica matemática y el razonamiento de problemas", los cuales ilustra con situaciones funcionales de la vida cotidiana, como el manejo del dinero en operaciones de compra-venta.

En cuanto a las concepciones con respecto a la principal problemática de la enseñanza de las matemáticas, el reto es superar el aprendizaje memorístico y la falta de razonamiento.

Es interesante que esta concepción se relaciona con la preocupación científica acerca de la educación matemática, que privilegia el aprendizaje de procesos algorítmicos, y la falta de la promoción del conocimiento conceptual o el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático (ver los autores referidos en el primer capítulo, en particular, Ávila, 2004; Eurydice European Unit, 2002; English, 1998).

Concepciones acerca del alumno, de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas.

La maestra considera que los libros tienen un método para transmitir sus contenidos o enseñanzas y concibe que las actividades presentadas en el libro de matemáticas no son "llamativas" (motivantes) para los niños y niñas. No obstante, el desinterés puede transformarse en interés en función de quién y cómo imparta la enseñanza, sobre todo si ésta se apoya con cierto tipo de materiales y es el docente quien logra motivar al alumno. Se observa que la profesora concibe que ella es una maestra que logra una clase divertida y motivante, debido a que maneja materiales concretos y actividades lúdicas, así sus alumnos aprenden haciendo y a través del juego.

Para ello describe la manera como considera que enseña las matemáticas "…trato de darles a conocer los números poco a poco, con materiales como palitos, por la lotería, por el juego de serpientes y escaleras, … busco involucrarlos en el trabajo que están haciendo, que trabajen en equipo, con material concreto".

Con base en lo anterior, la maestra reporta una actitud positiva de sus alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas, a razón de que utiliza materiales y emplea juegos. Sin embargo, cabe preguntar qué tanto atrae esto al niño, y si las actividades lúdicas promueven el hecho de jugar por jugar o se juega para aprender matemáticas, aspectos que se pudieron observar en el aula y en el análisis de la práctica escolar, última parte de este trabajo.

En cuanto al tipo de conocimientos que el niño de primer grado debe dominar, la maestra menciona el conocimiento de los números hasta las centenas y el poder resolver problemas matemáticos simples. El programa de la SEP (1993) propone que los niños de primer grado dominen hasta las decenas, y se enseñen problemas de diferente tipo.

Con respecto a los tipos de problemas matemáticos, la maestra refiere que éstos deben de ser sencillos e involucrar las operaciones de suma, resta y la repartición.

Con base en lo anterior, la maestra centra el aprendizaje de las matemáticas en la numeración, los algoritmos de la suma y la resta y los problemas elementales, más que en conocimientos matemáticos básicos, como la comprensión conceptual y procedimental del sistema decimal de numeración, el desarrollo conceptual y algorítmico de la suma y la resta, o la necesidad de desarrollar en el alumno habilidades específicas de razonamiento matemático, el fortalecimiento y la mejora de estrategias para la solución de problemas aditivos.

De acuerdo con la maestra, a diferencia de los alumnos con dificultades para aprender matemáticas, los alumnos con mayor facilidad para ello, viven con una familia unida, los papás tienen un poco de más recursos económicos, cuentan con una computadora, la que en su opinión les permite despertar las mentes de niños y niñas. Sostiene la creencia de que los niños y niñas con dificultad para aprender matemáticas provienen de familias desintegradas o que se están desintegrando. Por el contrario, sugiere que al alumno que se le facilita aprender matemáticas es porque tiene una suerte

de curiosidad intrínseca y una capacidad de razonamiento propia, "es muy inquieto". Y por el lado de los niños y niñas que se les dificulta aprender matemáticas, éstos son pasivos, "ni se paran y nadamás se quedan quietecitos".

En esta concepción, la maestra vincula características personales que ella percibe como capacidades y nivel de aprendizaje de sus alumnos, sin considerar aspectos relacionados con la forma en que un niño puede aprender o puede construir conceptos y conocimientos matemáticos. No hay una mención a las posibles habilidades cognitivas y metacognitivas implicadas ni al modelado y desarrollo gradual de estrategias y motivos provenientes de una determinada forma de enseñar. Por otra parte, también se nota que la maestra entiende por razonamiento el hecho de que el niño se ponga a contar (objetos, personas, eventos).

En cuanto a los contenidos que más se les dificultan a las niñas y niños de primer grado, la maestra cree que son: "… el cálculo mental… porque no están acostumbrados, porque todo se los dan, uno les dice el resultado". Llama la atención que se ubica el origen del conocimiento matemático del niño en la familia ("se lo dijo su mamá"), y que se espera que en buena medida los conocimientos previos pertinentes ya los hayan adquirido, al parecer en un contexto extraescolar.

En cuanto a la utilidad de los conocimientos matemáticos que el niño aprende en primer grado de primaria, la maestra cree que es un conocimiento que les ayuda en su vida, ya que lo emplearán todos los días, "para todo … para contar a sus compañeros, para ver cuántos libros le van a dar para que utilice este año".

De acuerdo con lo anterior, la maestra puntualiza como principal utilidad o aplicación del conocimiento matemático el conteo, el cual es una habilidad básica pero que no relaciona con la solución de problemas, ni con el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en un sentido más amplio. La utilidad del conocimiento matemático reside para ella en que lo empleen de manera funcional en su vida diaria, pero no en que también contribuya al desarrollo de otros conocimientos matemáticos más complejos y de otras habilidades cognitivas en el pensamiento del niño. Está lejos de concebir a la matemática como ese tipo de conocimiento científico que sólo se adquiere mediante un proceso de escolarización, y promueve el desarrollo de procesos psicológicos avanzados o superiores en la acepción vigotskiana que se revisó en el primer capítulo. Por otro lado, el lenguaje matemático es un potente instrumento de mediación, que puede funcionar como una forma de representación y transformación de la propia cognición del sujeto y del mundo social en que participa.

Contenidos específicos y aprendizajes más importantes con relación a la suma, la resta y la resolución de problemas aditivos

Antes que el niño o la niña llegue al conocimiento de la suma y la resta, la maestra considera indispensable que conozcan lo siguiente: "Primeramente que conozca los números, el valor de cada número, y que sepa interpretar el problema. Para que sepa cuál es la respuesta si es una suma o una resta o va a ser una división o de reparto". Así, la maestra considera que los niños deben tener conocimiento del número, su escritura, su valor e incluso saber leerlo.

Sin embargo, quedan encubiertos otros conocimientos indispensables del número para poder ser útil en el momento en que el niño pueda construir los conceptos que implican la suma y la resta. Ya que además el niño debe respetar principios como correspondencia biunívoca, ordinalidad y cardinalidad (Gellman y Gallistel, 1978). También debe ser capaz de emplear este conocimiento en una variedad de situaciones como el igualar un conjunto o poder hacer comparaciones entre dos o más conjuntos, para que de este modo el niño pueda ir construyendo los conceptos de suma y resta, (Nunes y Bryant, 1997), junto con el aprendizaje del procedimiento y la solución de sus algoritmos correspondientes, con la aplicación y el conocimiento convencional y conceptual del sistema de numeración decimal (Carpenter *et al*, 1999).

El desarrollo de conceptos matemáticos, la aplicabilidad de éstos a la cotidianeidad de los niños y a su mismo desarrollo, el enlace o crecimiento lógico de estos conocimientos, quedan en duda dependiendo de si la maestra tiene o no la claridad pertinente para llegar a enseñar los conocimientos correspondientes al primer grado. Entre éstos, la comprensión y utilización del conteo y la numeración, o el hecho de saber hasta las decenas, que también deben ser aplicadas al entendimiento de los algoritmos formales de la suma y la resta (Carpenter, *et al*, 1999). Finalmente, respecto a la importancia de que el profesor tenga un buen conocimiento de la materia a impartir, la investigación ha mostrado que la falta de dicho conocimiento constituye, quizás, la principal dificultad para

que los profesores afectados se involucren en actividades innovadoras (Tobin y Espinet, 1989).

Métodos y estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos específicos

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, específicamente para el conteo, la numeración, la suma, la resta y la solución de problemas aditivos en esta edad escolar, las estrategias y los recursos que emplea el maestro son esenciales para lograr los objetivos de enseñanza. En términos de Vermunt y Verloop (1999), las estrategias cognitivas, meta-cognitivas y afectivas son indispensables para el tipo y calidad de los resultados en el aprendizaje, por lo que resulta indispensable explorar cuáles son las concepciones de la maestra en esta área.

De acuerdo con lo expresado por la maestra, emplea materiales concretos, actividades lúdicas y tareas donde ejercitan los algoritmos y problemas convencionales, tratando de apegarse al programa. En relación a cómo trabaja el aprendizaje por problemas, plantea lo siguiente:

"¡Ah!, pues con un problema de sus compañeritos, por ejemplo. María tenía una bolsa con 20 paletas pero un niño le quitó 8, se le desaparecieron 8, ¿cuántas le quedan? O sea que sean cosas que él sienta, que él las palpe".

El texto anterior sirve para dos comentarios, el primero se relaciona con la conexión entre la teoría de la mente del niño y las concepciones de los docentes sobre el aprendizaje. Aquí se puede notar la preocupación de la maestra porque el niño adquiera el conocimiento, entendido éste como una copia exacta y directa de la realidad. Esta concepción de la profesora coincide con lo encontrado por Pozo (2000) respecto a las teorías implícitas de los profesores sobre el aprendizaje.

Según este autor, los profesores que detentan una teoría implícita de la enseñanza que Pozo denomina *teoría directa*, parten de una epistemología propia del realismo ingenuo y del dualismo; dicha teoría implícita tiene los siguientes supuestos: "El conocimiento refleja el objeto con fidelidad, aunque con diversos grados de plenitud o exhaustividad. Hay conocimientos parciales y conocimientos completos. Se establece una relación directa entre unas condiciones (edad, motivación, contacto con el objeto, etcétera) y los resultados del aprendizaje" (Pozo, 2000). Como se verá más adelante, dichas concepciones tienen trascendencia en la práctica docente, pues se ha encontrado que se vinculan, en el caso de esta docente, con el modo en que emplea los materiales educativos y con el tipo de contrato didáctico que establece.

El segundo aspecto a resaltar es que hasta aquí, pareciera que lo anterior resulta congruente con lo que se menciona en los programas de la SEP (1993) acerca de enseñar las matemáticas con el planteamiento de problemas. Sin embargo, en su concepción se aprecia un enfoque de problemas típicos (Martínez y Gorgorió, 2004; Mendoza, 2004) que se ubican en la categoría de problemas de *transformación o cambio* (Vergnaud, 1991), en los que dada una medida inicial y una transformación de ella, se pide a los niños y niñas que encuentren una medida o resultado final. Sin recurrir a otra clase de problemas, que planteen situaciones más complejas y otro tipo de relaciones entre sus variables, que lleven al niño a reflexionar y razonar de formas diferentes.

Acerca de si deben o no tener los niños alguna habilidad específica para aprender matemáticas, en especial para sumar, restar o solucionar problemas, la maestra considera que todos pueden aprenderlas. Y para los niños que tienen dificultad para aprenderlas, afirma que debe apoyárseles con material que les guste para que les llame la atención y se motiven.

En una investigación que realizaron Martínez y Gorgorió (2004) específicamente en las concepciones para la enseñanza de la resta, los profesores declararon que debe hacerse a través de problemas de enunciado escrito. En cambio, el planteamiento de problemas y de ejercicios a través de otras formas de representación (gráfica, con dibujos o de manera concreta) estuvieron ausentes.

Evaluación del aprendizaje

Finalmente, la concepción de la maestra sobre la evaluación consiste en apoyarse en el libro de la SEP, así como la participación del alumno en clase; acerca de otras formas de evaluar, afirma que "sólo esta, sus tareas y nada más". De acuerdo con esto, no considera posibilidades de evaluación auténtica, situaciones experienciales, de aplicación o transferencia del conocimiento matemático a problemas reales (Díaz-Barriga, 2006), más allá de los problemas rutinarios de lápiz y papel donde ejercitan algoritmos. Por otra parte, afirma que no emplea exámenes en sentido estricto, sino resolución de ejercicios y que utiliza los resultados de la evaluación para conocer los conocimientos con los que cuenta el niño y de ahí reforzar o en su caso avanzar a otros conocimientos matemáticos. Lo anterior resultaría clave en la educación, siempre que se lleve a cabo durante la práctica.

Los tiempos de la evaluación también se incluyen en las concepciones de la maestra, al preguntarle si tiene o no un momento para la evaluación, dice: "Yo creo que se evalúa en todos los momentos, en todos momentos se está evaluando, en las tareas, en los trabajos".

Aquí se observa que hay una concepción de evaluación formativa como valoración de avances y desempeño gradual del alumno, pero entra en contradicción con su visión centrada sólo en lo sumativo, en las tareas, con el fin de otorgar una calificación. En este párrafo habla de una evaluación en "todos momentos", pero más adelante dice "cada quince días", pareciera que se evalúa para obtener una calificación. Sin embargo, al continuar la entrevista aparece la figura del examen bimestral, el más importante, planteado en términos convencionales, de lápiz y papel.

Como comentario final de la maestra, al preguntarle si sugiere o agrega algo a la entrevista responde: "no, nada más que es muy extensa la materia, y sí nos gustaría saber nuevas formas de enseñar las matemáticas a los niños, a lo mejor estamos mal y sí nos gustaría que nos dijeran de algún método".

Este comentario reafirma la necesidad sentida del propio docente por una mejora del abordaje didáctico de esta materia, y también habla de las dificultades de enseñar los diferentes contenidos, así como de la falta de otras estrategias o métodos de enseñanza.

En una apreciación general de la entrevista con la profesora, aparecen algunas de las ideas de la "docencia del sentido común" que han sido documentadas por el grupo de investigación encabezado por Daniel Gil (1991), propia de las teorías implícitas de los profesores de materias científicas acerca de la enseñanza y el aprendizaje escolar:

- Una visión simplista de lo que es el conocimiento disciplinar que se enseña.
- La reducción del aprendizaje a ciertos conocimientos y a lo sumo, a ciertas destrezas, olvidando otros aspectos importantes.
- El asumir la obligación de cumplir el programa o seguir el libro de texto (en general enciclopédico), lo que termina siendo un obstáculo para profundizar en los temas o desarrollar habilidades.

- El carácter “natural” del fracaso generalizado de los alumnos en las materias científicas, el pensar que hay un determinismo biológico inmanente (alumnos listos y torpes) y sociológico (no se puede hacer nada o muy poco con los alumnos de medios socioeconómicos bajos o de familias desintegradas).
- La atribución de las actitudes negativas a la materia a factores exclusivamente externos, ignorando el papel que juega la enseñanza, la actitud y expectativas de los profesores hacia los alumnos, principalmente las propias.
- No ser consciente de cómo se aprende, de la necesidad de un conocimiento profundo de este tema y de la comprensión de lo que ocurre con sus alumnos.
- La idea de que enseñar es cuestión de experiencia, sentido común o de encontrar la receta adecuada (i.e. encontrar actividades y juegos que cumplan básica o exclusivamente la función de divertir o motivar a participar en su realización). Esto último impide muchas veces que los profesores tomen conciencia de la necesidad de un trabajo colectivo y de la apropiación crítica de una concepción teórica, que articule planteamientos didácticos congruentes y apropiados.

6.4.2 Análisis de las categorías de la entrevista aplicada al maestro de segundo grado.

Formación previa e interés en la didáctica de la materia

El maestro que imparte el segundo grado nació en la ciudad de Monterrey; actualmente tiene 25 años de edad. En cuanto a su formación profesional, estudió la Normal Básica, ha trabajado en educación primaria durante dos años y tres meses, por las mañanas, y por las tardes estudia una licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas, sin realizar otra actividad profesional o de otro tipo.

Semejante al caso de la maestra de primer grado en su concepción de la formación profesional, el maestro considera que ha sido influido sobre todo por la experiencia de su propia etapa infantil o por la actuación de sus maestros. También considera que su formación profesional en la enseñanza de las matemáticas inició desde la primaria, y de manera formal a partir de cómo les enseñaron a impartir las materias, aún cuando no fue específicamente para la enseñanza de las matemáticas.

Al entrevistarlo acerca de si se basa en alguna corriente teórica o teoría en específico para abordar la enseñanza de las matemáticas respondió:

“…bueno, hay muchos métodos, desafortunadamente en la formación del magisterio…, los maestros, por tiempo o por x razón, no nos muestran al pie de la letra cómo usarlos o si funcionan bien los métodos, *realmente lo que uno toma son las ideas de los maestros que ya tienen experiencia en el ramo, y con base en ellas nos vamos adaptando a las estrategias que ellos toman. De hecho corrientes, algunas que existan, no*”.

De acuerdo con esta respuesta, se observa la carencia de fundamentos teóricos claros para la enseñanza de las matemáticas. Se aprecia que su formación profesional, al igual que la de la maestra, se encuentra más relacionada con la práctica, basada en su propia experiencia y en su historia personal, situaciones semejantes a otras investigaciones (Monroy, 1998; Llinares y Sánchez, 1990), y en este caso basado en la experiencia de otros profesores. En este caso habría que destacar, además de lo mencionado para la profesora anterior, el hecho de la carencia de una visión de didáctica específica con bases teórico-metodológicas, en un docente que se está formando profesionalmente en la enseñanza de las matemáticas.

Nuevamente, se apelaría a las observaciones de Imbernón (1994) y Perrenoud (2004) sobre la importancia que reviste la apropiación significativa y reflexiva de las teorías pedagógicas y del aprendizaje vinculadas con lo que uno enseña. Como ya antes vimos, Gil (1991) ha establecido que es indispensable que los profesores logren superar las ideas de sentido común sobre la enseñanza y el aprendizaje, y que una docencia de calidad y orientada a la construcción del conocimiento no puede lograrse si no se parte tanto de una crítica fundamentada a la enseñanza habitual, como de la adquisición de conocimientos teóricos sobre la enseñanza-aprendizaje de la materia que se imparte.

Por ello surge como interrogante central cómo puede verse afectado el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, cuando los profesores no tienen claridad sobre las teorías o métodos para su enseñanza. El problema es más complejo cuando enfrentamos la fuerte demanda que el currículo plantea a los profesores: una orientación didáctica con bases constructivistas, y en el caso de esta materia, basada en la solución de problemas, inspirada en la didáctica de la escuela francesa (ver los dos primeros capítulos de este libro).

Concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas

En cuanto a la importancia de las matemáticas con respecto a otras materias, este docente las considera tan importantes como la materia de español, que se orienta a la comunicación, en tanto que las matemáticas están orientadas hacia la interpretación y la solución de problemas. Esta última parte se relaciona de manera general con lo que propone el currículo de la SEP (1993), donde se enfatiza que los niños desarrollen habilidades de resolución de problemas.

En su concepción de los tipos de aprendizaje que se buscan en el niño, se observa la intención de que aprenda la resolución de problemas matemáticos, como un conocimiento capaz de ser aplicado en la vida cotidiana, como el manejo del dinero en operaciones de compra y venta.

En cuanto a su concepción de la principal problemática en la enseñanza de las matemáticas, afirma que es el aprendizaje basado más en la memorización y en el entrenamiento de las operaciones a nivel del simple algoritmo, que con su relación con la parte conceptual (Mendoza, 2004).

"La problemática en las matemáticas es el razonamiento, muchos niños entienden números, saben interpretar números. Niños de sexto año saben lo que es una suma, lo que es una resta, lo que es una multiplicación pero lo saben de una manera mecánica, lo que no entienden es que la multiplicación es una suma abstracta, y que la suma es un desarrollo de una multiplicación, es lo que ellos no han entendido, no tienen ese razonamiento, no saben interpretar un problema. Cuando se les plantea un problema lo que ellos preguntan es: ¿maestro, es suma?, ¿maestro, es resta?, ¿es división?"

El profesor trata de aproximarse a la concepción de la dificultad de la enseñanza con relación a la comprensión de los principios del sistema decimal, describe la problemática del aprendizaje y comprensión del valor posicional, del tamaño de las unidades y de la composición aditiva, entre otros, aplicados al concepto y algoritmo de la resta. Esta concepción resulta importante, pues manifiesta la necesidad de atender las dificultades que enfrentan ante estos conocimientos matemáticos tanto el niño cuando los aprende, como el profesor al enseñarlos.

Concepciones acerca del alumno, de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas

El maestro cree que la capacidad del niño para aprender matemáticas

depende de la actitud y de la forma de enseñanza de los profesores, así como del grado. Considera las concepciones de los maestros de matemáticas como "difíciles", pues afectan el aprendizaje de los niños porque desarrollan una actitud negativa. A mayor grado, será mayor la dificultad del niño, por el tipo de conocimientos más complejos. También considera importante la forma en la que el profesor enseña, siendo más difícil cuando el aprendizaje es mecánico, memorístico, dirigido y complicado. Nótese que piensa que en los dos primeros grados no se trata como tales a las matemáticas y no se les dice a los niños que están estudiando dicha materia, porque cuando esto se hace, se vuelve "aversiva" y difícil.

"A nivel primaria, en primero y segundo año, no lo ven como algo fastidioso, porque no se les trata como tales matemáticas, bueno dependiendo del maestro hay maestros que las hacen enredadas, cuando en realidad debe hacerse de la forma más sencilla posible".

Esta reflexión es importante porque, a diferencia de la profesora de primer grado, este docente articula factores que se relacionan con el sujeto que aprende, el agente educativo y los contenidos a aprender. De acuerdo con Pozo (2000) sobre las teorías implícitas de los profesores, logra superar en parte la teoría directa de la enseñanza para incursionar en lo que el autor llama teoría *interpretativa*, puesto que tiene una visión más plural de los factores involucrados y un enfoque realista interpretativo. El maestro destaca como características de los alumnos a los que se les facilita aprender, el papel cultural, económico y social de los padres, el tipo de relación que mantienen los padres, el interés por sus hijos.

Y en cuanto a los niños con dificultad para aprender matemáticas, se puede observar una asociación del maestro entre los rasgos de comportamiento o de personalidad de los niños con su facilidad o dificultad para aprender matemáticas, los niños que platican, juegan o están parados tendrán dificultad para aprender, contrario a los que se muestran más atentos e inquisitivos y que son niños "educados". En este contexto, el profesor señala características de los alumnos y diversos factores que ciertamente podrían afectar el aprendizaje de los niños sin ser del todo determinantes. Esta concepción muestra las dificultades diversas que puede encontrar como docente, por lo que resulta importante revisar sus concepciones acerca de las estrategias en que se apoya para enseñar y atender las diferencias de sus alumnos.

Con respecto a los contenidos de matemáticas que más se les complican a los alumnos, el profesor cree que la principal problemática, en sus alumnos de segundo grado, es el sistema decimal de numeración, el principio de valor posicional y de composición aditiva; concepción que se relaciona con los resultados de Cortina (1997), que señala este conocimiento como una dificultad importante que enfrenta la población infantil en México y otros países.

Contenidos específicos y aprendizajes más importantes en relación con la suma, la resta y la resolución de problemas aditivos

El maestro entiende que el niño debe adquirir los siguientes conocimientos con relación a la suma y la resta: "que logre *entender el valor posicional de cada número*, debe identificar cuál es la decena, cuál es la centena y cuál es la unidad; si el niño no comprende que el valor posicional es muy importante, se le va a dificultar la resta y la suma. Aquí debemos trabajar la parte de la reflexión, del análisis, porque el niño tiene que comprender en qué casos tiene que ser suma y cuándo tiene que ser resta".

De acuerdo con el párrafo anterior, el maestro concibe que el principal conocimiento para la adquisición de la suma y la resta es el principio del valor posicional, con relación al sistema decimal. Como se vio en el apartado de resultados del aprendizaje de los niños, hay coincidencia con las dificultades reales que muestran los alumnos. También se observa su preocupación porque el niño desarrolle habilidades cognoscitivas como la reflexión y el análisis con relación a estos conocimientos. Sin embargo, parece dar por sentado que previamente los niños ya manejan el conocimiento del conteo y la numeración.

De acuerdo con el maestro, además de trabajar con la comprensión del valor posicional de los números, también es importante trabajar aspectos conceptuales, más que de procedimientos mecánicos, con base en las tendencias teóricas de la enseñanza de las matemáticas (aunque nunca precisa cuáles), y afirma que es importante centrar la instrucción en la solución de problemas matemáticos.

En sus concepciones acerca de la importancia del conocimiento del sistema decimal, el profesor lo enfatiza con la suma y lo relaciona poco con la resta. Además, considera que estos conocimientos deben ser enseñados en los últimos tres grados de educación primaria. Nótese que la argumentación gira en torno a la observación

de los procesos de aprendizaje de esos contenidos en sus alumnos, así como en torno a las dificultades que éstos enfrentan.

Asimismo, el maestro considera importante enseñar a resolver problemas aditivos, aunque el énfasis recae en la aplicación funcional de este conocimiento en operaciones de compraventa, de manera similar a la docente de primer grado. Aunque también le parece útil el conocimiento de la suma y la resta para la resolución, en los siguientes grados, de problemas que impliquen el uso de más de una operación y con cantidades de siete o más dígitos. Sin embargo, no aparece la relación de estos conocimientos como base para la comprensión de otros más complejos, como la multiplicación y la división (Wadsworth, 1991; Nunes y Bryant, 1997).

Métodos y estrategias didácticas que el docente emplea en la planeación y enseñanza de contenidos matemáticos específicos

En cuanto a sus estrategias para la enseñanza de las matemáticas, es interesante notar que el maestro apela a actividades experienciales de la vida cotidiana y a la idea de que la motivación no sólo está dada por la actividad lúdica en sí, sino que también influye si el niño siente o no que aprende (lo que los psicólogos llamamos motivación de logro y de control). Asimismo, utiliza problemas con la simulación de "la tiendita", postura que coincide con el punto de vista de Carraher *et al* (1991), quienes señalan la importancia de proponer a los alumnos situaciones cotidianas.

Sin embargo, en el discurso del maestro se plantea únicamente un tipo de problemas típicos (Martínez y Gorgorió, 2004) que se ubican en la categoría de problemas de transformación (Vergnaud, 1991), sin plantear otros, con diferente nivel de complejidad. Aunque el profesor destaca la importancia del juego y el poder motivacional de las actividades lúdicas, es consciente de que la cuestión no es jugar por jugar, sino que la meta es el aprendizaje con comprensión de los conceptos matemáticos implicados. Se observa de igual forma el uso de otros recursos, como materiales de reciclaje, dinero de juguete, así como el empleo de su libro recortable, estrategia que enriquece el ambiente y el contexto en el que se plantean y resuelven problemas.

Específicamente, dentro de las estrategias que el maestro utiliza para promover el aprendizaje de los niños que tienen dificultades con matemáticas, considera difícil adaptar una clase considerando a todos, aunque es posible hacerlo, así que con los niños que tienen dificultades trabaja de manera individual o personalizada, les da más tiempo y atención, utiliza materiales.

En la concepción del maestro acerca de si los niños y niñas tienen o desarrollan alguna habilidad específica para aprender matemáticas, en especial para sumar, restar o solucionar problemas, nuevamente aparece la idea de la influencia de los padres, aunque en algún momento se confunden las "condiciones genéticas" con el nivel de instrucción o escolaridad de los padres.

En este sentido, más allá de lo que se ha comentado respecto a la coincidencia con los hallazgos de Gil (ob. cit.), resulta importante diseñar programas para trabajar el cambio conceptual de estas concepciones del sentido común en el docente (Thompson, 1992; Martínez, 2004), así como mejorar sus prácticas educativas.

Respecto del uso de material didáctico, el maestro destaca la falta de material suficiente, así como la conveniencia de usar dinero de juguete para la enseñanza de la suma y la resta. Sin embargo, afirma que adapta el material que se tiene dentro del salón, como rondanas, fichas, papeles, entre otros. Esto ilustra el ingenio del profesor para adaptar y utilizar eficientemente el material con que se cuenta.

En cuanto al uso de textos, sólo emplea los que provee la SEP (avance programático y libros de texto), pues le parece que la posición económica de los padres no permite usar otros.

Evaluación del aprendizaje

Con respecto a la concepción del maestro acerca de su forma de evaluar el aprendizaje de las matemáticas considera lo siguiente: "La evaluación que nosotros hacemos es constante, es evaluación cuantitativa y cualitativa, a final de cuentas siempre va a afectar en un número. La importancia de la evaluación cualitativa es con la finalidad de entender cuál es el nivel de comprensión que hasta el momento tienen los niños, bien para reconocer en qué puedo ayudar, en qué no puedo ayudar, en qué estoy fallando, en qué están fallando, es lo importante de la evaluación; la evaluación es diaria, continua, no puede ser un día sí, un día no, ... Es a través de la observación del alumno, de los exámenes, también de la evaluación de los ejercicios".

De acuerdo con la concepción del maestro, su evaluación cualitativa consiste en tratar de entender el nivel de comprensión de

los niños para después poderles ayudar, centrándose en una evaluación formativa, pero al final esto necesariamente se reflejará en una calificación numérica, dada la importancia de la evaluación global. Es importante destacar que la función principal que atribuye a la evaluación se enfoca a la comprensión y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje; también destaca la idea de que no sólo se evalúa al niño, sino a sí mismo, a la manera en que está enseñando. La concepción de que la evaluación tiene que ser continua, ajustada, y que se pueden utilizar los resultados para ayudar al niño, coincide con la tendencia constructivista (Gil y Hernández, 1993).

A manera de comentario de cierre de lo que se ha encontrado respecto a las concepciones de los profesores, y a pesar de que no hay un pronunciamiento explícito por alguna corriente psicológica o pedagógica que dé soporte a su enseñanza, en su discurso aparecen elementos vinculados con las corrientes educativas prevalecientes: la importancia del razonamiento, lo inapropiado de quedarse en un aprendizaje memorístico, la relevancia de resolver problemas, de llevar el conocimiento matemático a la vida diaria, lo importante que es que el alumno esté motivado y participe activamente, etcétera. El análisis ulterior de su actuación en el aula nos permitirá ver el sentido real de tal discurso y lo factible que es llevar a la realidad estas concepciones. Los profesores afirman que su aproximación a la docencia de las matemáticas es resultado de *su propia experiencia e historia personal*, situación que coincide con lo que se ha encontrado en otros estudios (Llinares, 1990; Monroy, 1998). Finalmente, se han encontrado algunas ideas de la llamada docencia del sentido común (Gil, 1991), sobre todo las referidas al determinismo genético y sociológico, con base en el cual los profesores explican la capacidad de los distintos alumnos para aprender matemáticas.

Para finalizar la presentación de resultados, siguiendo con los objetivos centrales de esta investigación, en el siguiente capítulo se presentan los resultados de las prácticas educativas, en términos del contrato didáctico que ocurre durante las clases, que permiten contrastar estas concepciones de los maestros y la forma de cómo realizan sus prácticas durante la enseñanza. Además, permitirán relacionar las concepciones y las prácticas docentes con los resultados del conocimiento adquirido por los alumnos.

6.5 Resultados del análisis de las prácticas educativas

El tipo de conceptos, procedimientos y estrategias que caracterizan el conocimiento matemático que el niño adquiere, es influido por su propia participación y por las características de la instrucción de su profesor, así como por la relación didáctica que logra establecerse entre ellos.

Se ha visto que durante la clase se establece un tipo de relación didáctica, mediada por un conjunto de obligaciones y responsabilidades que son distribuidas entre el profesor y el alumno, relación didáctica determinada por un tipo de contrato (Brousseau, 1997, 2000). También se vio, de acuerdo con Ávila (2001a) que lo que caracteriza a cada contrato es una cierta distribución de la responsabilidad entre el profesor y los alumnos. Conforme a esta teorización, las distintas responsabilidades que puede asumir el profesor repercuten en las de los alumnos y dan lugar a diversos contratos que van, de los *no didácticos,* a los *fuertemente didácticos.*

En esta investigación se ha corroborado que no ocurre un tipo único de contrato, pues como bien dice Brousseau (2000), los contratos son perecederos y tienden a cambiar de acuerdo a las exigencias de la actividad, del cambio de la temática, y en este caso, del estilo o características especificas de cada profesor. Durante el análisis de las clases se observó que se establecían diversos contratos, aunque predominaron los fuertemente didácticos. A continuación se ofrece evidencia de que en la clase de la maestra ocurría más el *contrato de reproducción* y el *de condicionamiento*, mientras que en el caso del maestro predominó el *contrato de ostensión*.

Por razones metodológicas[1] y de síntesis, se presentan sólo segmentos de las clases que se consideraron como representativos del tipo de contrato de cada profesor. Este análisis se basa en trabajos de Ávila (2001a, 2001b), por lo que conviene citar cómo se definieron los contratos encontrados. De acuerdo a esta autora y con base en Brousseau, en los setenta se buscaba partir de las nociones intuitivas de los niños para –mediante apoyo de las situaciones y las preguntas pertinentes– arribar a las nociones matemáticas formales, lo que implicaba incorporar la interrogación y, a partir de las respuestas dadas por los alumnos, concluir con la formulación de la noción prevista, dando lugar al establecimiento de un *contrato de descubrimiento*.

[1] Un criterio para la elección del fragmento de la clase fue analizar y seleccionar intencionalmente el segmento que representara más las características de un tipo de contrato, basados en la definición de los tipos de contrato hecha por Brousseau (1997, 2000). Para validar la pertenencia a un tipo determinado de contrato, se recurrió a una triangulación de datos por jueces, con la participación del investigador, la Dra. Díaz Barriga y la Dra. Ávila, especialista en el tema. Los tres revisaron los fragmentos seleccionados y de manera independiente los ubicaron como representativos de los tipos de contrato referidos.

Por su parte, el *contrato de explicación "a la medida",* implica que el profesor debe tener una excelente memoria didáctica; a cada momento sus decisiones derivan del reconocimiento de los conocimientos personales y diversos de cada uno de sus alumnos; también de sus exigencias y necesidades didácticas, implica explicar bien (y con ello hacer comprender) las nociones matemáticas a los alumnos. El alumno muestra su estado de conocimiento y expresa públicamente sus dudas.

En los contratos de *reproducción formal*, el maestro se compromete a que el alumno realice una tarea culturalmente aceptada como adquisición de un saber, los medios no importan, pero sí la actividad, que se supone fuente y prueba de aprendizaje.

El alumno realiza la tarea con la condición de que sea reductible al repertorio que posee.

En los *contratos de condicionamiento*, la ejecución de una tarea no garantiza que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, como son la asociación y la repetición, el profesor cree que con esto el alumno se familiarizará con el objeto de aprendizaje.

Los *contratos de ostensión*, definidos por Brousseau y relacionados según Aebli (1958) con una forma de enseñanza propia de la didáctica tradicional, se basan en la idea de que la lectura del *medio* puede ser inmediata: el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre y aprende por repetición frecuente de las mismas circunstancias. Los contratos de *ostensión* derivan de una concepción sensual-empirista. En estos contratos, el profesor <<muestra>> un objeto, o una propiedad, y el alumno acepta <<verlo>> como el representante de una clase de la cual deberá reconocer los elementos en otras circunstancias.

En esta sección se presentan, por grado, los tipos de contrato que ocurren durante el análisis de cuatro clases. Al final se ofrece una síntesis que compara y relaciona los resultados de cada grado.

6.5.1 Resultados del análisis de las prácticas de la maestra de primer grado

Enseguida se presentan los tipos de contratos que se observaron durante las prácticas de la maestra de primer grado. Aun cuando en cada clase se presentó más de un tipo de contrato didáctico, el que predominó fue el contrato de reproducción formal y en segundo término el de condicionamiento.

Tabla 27. Tipo de contrato didáctico que ocurre durante la clase de matemáticas del primer grado

Clase	Fecha	Temática	Tipo de contrato: Fuertemente y ligeramente didácticos
1	8/oct./ 2004	Conteo, suma y resta con material, escritura de números.	Reproducción formal – Condicionamiento
2	10/nov./2004	Conteo y numeración del 1 al 100	Reproducción formal – Condicionamiento
3	2/jun./2005	Manejo de decenas, conteo y numeración, reconocimiento de la palabra escrita de un número y su símbolo numérico.	Reproducción formal – Condicionamiento
4	24/jun./2005	Decenas, adición con material, algoritmo de la suma.	Reproducción formal – Condicionamiento, Información

6.5.1.1 Del tipo de contrato didáctico en la primera clase

A continuación se presenta un segmento que muestra el tipo de contrato didáctico que ocurrió en la clase que impartió la maestra del primer grado, en los primeros días de octubre, donde el tema central fue la suma y la resta mediante el conteo con material, además se buscaba que el niño identificara el cardinal y el numeral, en números menores que doce.

De la relación didáctica establecida en esta clase, se observa que la profesora toma la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. La maestra intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno. Con esta acción, la profesora lleva a cabo un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997, 2000).

En esta clase la profesora se ve comprometida a que el alumno realice, por un medio cualquiera, una tarea que es culturalmente reconocida como marca de adquisición de un saber; en este caso, hacer que el niño reproduzca una serie de tareas en las que debe contar, tratando de resolver tareas de suma y en escasas ocasiones de resta, mediante las acciones de agregar o sustraer con el apoyo de palillos. El medio por el cual se logra la producción de la tarea no es importante, puesto que es la actividad en sí misma la que se supone fuente y prueba del aprendizaje. En esta clase 1, la maestra no exige razones o explicaciones, ni ella ofrece retroalimentación ni explicación a los niños. Así, la traducción de las órdenes del profesor en actos no exige el pasaje por el conocimiento previsto, el hecho de que la maestra pida al niño que quite o agregue palillos difícilmente promoverá que el niño comprenda la suma o la resta. Como contra-parte, el compromiso del alumno es efectuar la tarea definida por el profesor con la condición de que sea reducible al repertorio que posee, si el niño no logró reproducir la actividad, la maestra la resuelve frente al niño. Ante estas condiciones bajo las que ocurre la clase, se establece un contrato formal.

Con el transcurrir de la clase, en este caso al no ser la reproducción de una tarea, lo más frecuentemente es la garantía de que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, es decir, como razones del saber que aquél ha aprendido. Entre estas causas se encuentran la asociación y la repetición, como es el dictado de varios ejercicios de conteo que el niño debe seguir mediante el uso de material. La profesora en algunas ocasiones revisa y ayuda a que los niños sigan el procedimiento correcto. Aquí el rol del alumno es repetir, pues el profesor cree que el tiempo y la repetición se encargarán de familiarizarle con la cardinalidad del número, los numerales, y principalmente con la adición y la sustracción, que serían el objeto de aprendizaje. El alumno tiene la obligación de realizar la actividad, de seguir el procedimiento que la maestra indica y en algunas ocasiones que muestra cuantas veces se sugiera, y el alumno tratar de poner atención. Ante las características que se establece en esta clase, tiende a predominar un contrato de condicionamiento y en algunas ocasiones aparece el contrato basado en la ostensión como la exposición de cómo contar que hace la maestra frente al grupo.

Por lo tanto, la dinámica del desarrollo del tipo de contrato didáctico que ocurre en esta clase se establece entre un contrato de reproducción formal y posteriormente con el transcurrir repetitivo de una serie de ejercicios similares, pasa a establecerse un contrato de condicionamiento.

Sin embargo, con el transcurrir de la clase suelen ocurrir efectos que afectan la relación didáctica y la calidad del conocimiento en el alumno, en algún momento de esta fase del proceso de enseñanza-aprendizaje, el profesor tiende a dar las indicaciones de cómo proceder o qué hacer para dar solución a los ejercicios que se plantean y no se logran completar los objetivos de aprendizaje, dando lugar al efecto Topaze (Brousseau, 1997). Se observa en varias actividades que la maestra no sólo dice cada uno de los pasos de las actividades, también resuelve la actividad por sí misma, da pistas, sugiere preguntas o puede dar la respuesta, lo que podría generar que el alumno lograra conocimientos matemáticos parciales o fragmentados.

6.5.1.2. De la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta

En la descripción de estos resultados se describe lo más relevante que ocurrió en las cuatro clases, con la finalidad de mostrar una visión que ilustre el transcurrir y de alguna forma la evolución de este proceso de la enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta, considerando los contenidos de enseñanza, la forma en que la profesora intenta enseñar, así como los principales logros y dificultades de los niños.

En la primer clase se observa la intención porque los niños trabajen una serie de ejercicios relacionados con la noción conceptual de la adición y la sustracción, donde la maestra dicta dos números de un solo dígito y los niños deben representarlos con objetos y emplear la adición o la sustracción. Se observa que en el dictado de estos ejercicios la maestra hace uso de los términos: “suman” y “más” para la adición y “se me pierde” y “quitan” para la sustracción.

En este proceso la maestra se asegura de que los niños realicen la actividad con objetos, y en algunas ocasiones pide que realicen cálculos mentales, en caso de que los niños resuelvan así cuando la maestra no lo pide, sus resultados se consideran como no válidos. En algunos de estos ejercicios de adición o sustracción la maestra utiliza el resultado obtenido para trabajar el

reconocimiento del cardinal y su numeral, en donde los alumnos deben pasar a escribir en el pizarrón su numeral. Dentro de estos ejercicios se observa la práctica de conteo aislado, simple y repetitivo, sin contextualizarse mediante el planteamiento y solución de problemas como base para la enseñanza de esos conceptos. No existe el planteamiento de situaciones problema reales, donde sea el niño quien trate de buscar una solución, en donde el profesor le guíe a través de preguntas, que provoque la reflexión, lo anime a la creatividad, al uso y el incremento de más y mejores estrategias y conceptos matemáticos.

Por otra parte, durante la segunda clase, impartida en el mes de noviembre, la maestra trabaja dos actividades, en la primera los niños practican el conteo y a la vez el reconocimiento del numeral. Utilizan el juego de “el caminito”, en el que los niños tienen una cartulina con números del 1 al 100, ordenados en una serie de cuadros, y en cada cuadro va un número y una figura; la maestra pide se ubiquen en alguna figura, y cuenten hasta llegar a otra y digan como resultado cuántos faltan para llegar a la figura sugerida y al mismo tiempo reconozcan el numeral en que cayó la figura indicada. Para ello los niños deben reproducir y repetir varios ejercicios una y otra vez. En la segunda actividad, se trabaja la cardinalidad y su numeral, la cual se basa en el libro de primer grado, donde los niños tienen que contar el total de los grupos con figuras y unir con su número correspondiente.

En cuanto a la tercera clase analizada, que se realizó en el mes de junio, la maestra trabajó dos actividades relacionadas con la práctica del reconocimiento del valor posicional de los números y su valor cardinal, el reconocimiento de la palabra escrita del número en forma de oración y su numeral, empleando como base la actividad del conteo. En la actividad de la representación del valor posicional de los números hasta con decenas, los niños deben representar sobre una cartulina el valor de números menores a 100, colocando una ficha roja sobre las decenas y una ficha azul sobre las unidades.

En esta clase la maestra, al igual que en las cuatro clases, se asegura que los niños realicen la actividad, que repitan los ejercicios en su cuaderno, pasen a resolver sobre el pizarrón, y en caso de que no puedan hacerlo por sí mismos sugiere lo copien del pizarrón como muestra de que se ha realizado el trabajo exigido institucionalmente. En esta actividad se observa una enseñanza- aprendizaje basada en memorizar la colocación correcta de las fichas en el lugar de las decenas y de las unidades correspondientes, en caso de que el niño no lo logre, la maestra da a evaluar al grupo sus respuestas, permitiendo la ayuda o sugerencias de los compañeros hasta resolver correctamente. Ante estas condiciones se observa una clase en la que trascurren contratos alternativos entre los de reproducción formal y los de condicionamiento y en su caso de ostensión.

Sin embargo, la actividad se centra en la memorización de cuánto vale la ficha roja, de la colocación correcta de las fichas, no se observa el planteamiento de preguntas, o de situaciones que lleven al niño a la reflexión y la comprensión del valor posicional. En contraste con sus concepciones, la maestra considera que la principal problemática de la enseñanza de las matemáticas es lo memorístico, y sin embargo esto es lo que ocurre durante su práctica.

Finalmente, en la cuarta clase se observa la práctica de la solución del algoritmo escrito y de la suma con el apoyo de material. En esta actividad, la maestra inicia la clase brevemente con el repaso del conteo y la cardinalidad del número, para dar paso a la práctica del algoritmo formal por escrito de las sumas con un solo dígito, y continuar con sumas que impliquen dos dígitos, en especial con decenas (30 + 20]. En este proceso del aprendizaje del algoritmo la maestra trata de cuidar que los niños escriban correctamente los números y el signo "más" (+), recordando las "reglas del algoritmo", iniciando por escribir los números, después el signo, escribir el número más grande "arriba", no escribir "chuecos los números" (alinear los números por su valor posicional), escribir la raya y debajo de ésta el resultado, siempre con la exigencia de que muestren primero un resultado mediante el conteo con material. Hace que los niños trabajen primero sumas con palitos (azules unidades y rojos decenas) y después lo complementa con la suma escrita, donde se pide a un niño que resuelva la suma en el pizarrón, y el resto de los niños en su cuaderno.

De acuerdo con esta clase, se observa la intención de la maestra porque los niños repitan una serie de ejercicios con la finalidad de que aprendan a hacer sumas, primero con material y luego por escrito, primero con sumas de un solo digito para trabajar las unidades y posteriormente con decenas. En algunas ocasiones muestra cómo hacer las sumas con palitos, posteriormente cuando trabaja con la suma por escrito indica que todos deben escribir primero el algoritmo en su cuaderno, luego realizar el conteo con material, y

finalmente escribir el resultado. La actividad se centra en la escritura de la operación, la obtención de un resultado del conteo con material, y escribir el resultado obtenido en el conteo sin atender el procedimiento del algoritmo escrito. Ante estas situaciones, en la clase ocurre más un contrato de condicionamiento y en otras ocasiones aparece el contrato de ostensión.

En cuanto a la escritura del algoritmo, se observa una serie de inconsistencias, quien realiza el algoritmo sobre el pizarrón no alinea los números en su lugar del valor posicional, situación que es observada con varios niños cuando escriben la operación en sus cuadernos, la maestra solo atiende la obtención y la escritura del resultado correcto con base al conteo con objetos.

En esta clase, se observa que algunos niños reconocen el valor asignado al color rojo (10) y azul (uno), sólo como regla establecida. Se observa la carencia de preguntas o argumentos por parte de la maestra que guíen al niño en la comprensión del valor posicional aplicado al algoritmo de la suma.

De manera general, en este proceso de enseñanza-aprendizaje, ante los tipos de contrato que se celebran en esta y en las demás clases, la práctica y repetición de uno y otro ejercicio, pareciera que está más en cumplimiento de las obligaciones curriculares institucionales que la finalidad de provocar algún cambio cognitivo (Mendoza, 2004) que se caracterice por la construcción de más conocimiento matemático, en este caso el conocimiento y el empleo útil del conteo, como son el uso del valor y significado de los números, o la práctica de diferentes situaciones, como el planteamiento de problemas aritméticos de la vida cotidiana que se orienten hacia el desarrollo conceptual de la adición y la sustracción (Gellman y Gallistel, 1978; Nunes y Bryant, 1997), y en su caso poderlos relacionar con los algoritmos de la suma y la resta, que sean de utilidad para el desarrollo del conocimiento del niño.

A lo largo del análisis de estas cuatro clases se observa el planteamiento de actividades más relacionadas con el desarrollo del conocimiento de la suma. En el desarrollo del conocimiento de la resta, sólo se observan dos actividades en la primera clase, relacionadas con ejercicios de la sustracción de números con un dígito mediante el empleo de material en el que la maestra emplea los términos "se me pierden", "quitan" y los niños los expresan como "quitarle, separarlos". Estos son ejercicios únicamente con material y sin contextualizarse en algún problema.

6.5.1.3 Del juego a los problemas no planteados en el grupo de primer grado

Mediante el análisis de estas prácticas educativas se observa la ausencia del planteamiento y de la solución de problemas aditivos, con la presencia única de ejercicios como los descritos anteriormente. En todo caso, la maestra recurre a la práctica de una serie de ejercicios que involucran la práctica del conteo, el reconocimiento del número escrito y de su valor, y en la última clase, la práctica del algoritmo de la suma y con materiales.

Por otra parte, ante la ausencia de una enseñanza basada en el planteamiento y la solución de problemas, se aprecia la intención de la maestra por utilizar el juego, sin embargo se observa una secuencia de actividades rutinarias que implican únicamente el conteo, el reconocimiento del número, con escasa o nula interacción entre los alumnos, sin preguntas de reflexión, sin reformulación de los conocimientos del valor posicional, de la suma y la resta que se intentan enseñar.

En la descripción de estos intentos de la maestra por utilizar el juego para aproximarse a la enseñanza del conocimiento matemático, se observa que en la clase 2 procura trabajar el valor posicional con una serie de fichas de color y de tablas donde los niños deben representar el valor posicional de algunos números. En la clase 3 en la práctica del conteo y el reconocimiento del numeral utilizan una lámina, "el caminito" con números del 1 al 100 acompañados de figuras, en la que los niños practican el conteo y el reconocimiento del cardinal y del numeral.

Como mejor estrategia de apoyo, se observa el empleo de "palitos" como material para la realización de las actividades de conteo, de adición y sustracción.

En síntesis, se nota que desde el inicio hasta el final del ciclo escolar, la maestra continúa trabajando actividades relacionadas con el conteo y la numeración. Sin embargo, al final del ciclo escolar los niños presentan aún dificultad para entender las actividades relacionadas con la cardinalidad del número, el reconocimiento de los numerales, dificultades con el entendimiento del valor posicional de las decenas y su aplicabilidad en el algoritmo de la suma, la ausencia de planteamiento de problemas y de la resta; dificultades que se relacionan con la muestra de los resultados grupales y de los estudios de caso del conocimiento de los niños de primer grado.

En complemento de lo que ocurre en las clases de la maestra y de sus concepciones expresadas durante la entrevista, considera que antes de que el niño conozca la suma y la resta debe conocer primero los números, el valor de cada número, la interpretación del problema para que sepa qué operación debe utilizar. Al respecto se observan prácticas relacionadas con ejercicios de conteo, cardinalidad, reconocimiento del numeral y únicamente el algoritmo de la suma, sin observarse el planteamiento de problemas.

En su discurso, acerca de sus estrategias de enseñanza concibe el trabajo en equipo pero en la práctica sólo se logra observar el trabajo individual. Concibe hacer uso de materiales y del juego, donde ciertamente se observa en su práctica el apoyo constante de materiales como "palitos", o juegos como el "caminito". Considera la solución de problemas para la enseñanza de los conocimientos anteriores, sin embargo en la práctica no se observan dichas actividades ni la resolución de problemas que contemplen los conocimientos referidos. Y aún cuando ya se discutió en los resultados de sus concepciones, la maestra muestra sólo problemas sencillos de compra o venta.

Finalmente en cuanto a la dinámica de la clase, se observa el trabajo en pizarrón, la copia, el apunte y la escritura del ejercicio en sus cuadernos, el trabajo individual, el apoyo en actividades del libro, y como estrategia principal el diálogo triádico (Lemke), en el que la maestra plantea un ejercicio, el alumno da la respuesta y se evalúa el resultado como correcto o erróneo; por lo regular es el maestro quien evalúa las respuestas y en algunos casos da a evaluar la respuesta a los alumnos.

De esta forma, se han presentado los resultados del análisis de la práctica educativa de la maestra del primer grado, en términos del contrato didáctico con predominio de la ocurrencia de los contratos de reproducción formal, el de condicionamiento, y en algunas ocasiones ocurre el contrato de ostensión. En la celebración de este tipo de contratos se observa a la maestra preocupada porque sus alumnos reproduzcan las actividades correspondientes, y ejecuten cuantas veces sea necesario los ejercicios, como prueba de que han aprendido. En cuanto a los contenidos de enseñanza, éstos se centran en conocimientos de conteo, el reconocimiento del número y su cardinal, las aproximaciones del reconocimiento del valor posicional de las decenas, la solución del algoritmo de la suma, la ausencia del algoritmo de la resta y ausencia del planteamiento y solución de problemas aditivos.

6.5.2 Resultados del análisis de las prácticas del maestro de segundo grado

Siguiendo la forma anterior de presentación y análisis de estos resultados, enseguida se presentan los tipos de contrato didáctico que se observaron durante la práctica educativa del maestro de segundo grado. A razón de que una clase puede ser dinámica por el cambio de contenido temático y el tipo de instrucción del maestro, entre otros factores, no puede permanecer regida por un solo tipo de contrato didáctico ya que éstos son perecederos; en este sentido, en la clase del maestro se presentó más de un tipo de contrato, aunque predominó uno basado en la ostensión.

Tabla 28. Tipo de contrato didáctico que ocurre durante la clase de matemáticas del segundo grado

Clase	Fecha	Temática	Tipo de contrato: Fuertemente y ligeramente didácticos
1	68/oct./ 2004	Solución de problemas de suma y resta	Condicionamiento, ostensión
2	16/nov./2004	Solución de problemas de suma y resta	Reproducción formal-condicionamiento, ostensión
3	27/ene./2005	Sistema decimal, suma, solución de problemas	De descubrimiento, de explicación, ostensión
4	28/ene./2005	Sistema decimal, suma, resta, solución de problemas	Reproducción formal, condicionamiento, ostensión

En la tabla anterior se observa la ocurrencia de diversos tipos de contrato; en el caso de los contratos de reproducción formal, en algunos casos se pedía a los niños que copiaran lo escrito en el pizarrón como justificación de su aprendizaje, y el de condicionamiento ocurría cuando los niños tenían que realizar una serie de ejercicios, por ejemplo la aplicación de los algoritmos. Los contratos de explicación y de descubrimiento sólo se mostraron ocasionalmente al inicio, sin llegar a completarse; sin embargo, predominó el contrato de ostensión al presentarse consecutivamente en las cuatro clases, aun dentro de una misma clase al cambiar de actividad. A continuación se describe su proceso de ocurrencia.

6.5.2.1 Del contrato de ostensión en la clase del segundo grado

Para el análisis del tipo de contrato didáctico se eligió la clase 4, en la que el profesor trabajó el algoritmo de la suma y la resta y la solución de problemas. Durante el transcurso de la clase, el profesor explica el procedimiento del algoritmo de la suma, sin embargo, hace una explicación general al grupo, sin emplear de manera precisa los conocimientos diversos y personales de la mayoría de los alumnos, además de que la memoria didáctica no está presente en la estrategia de enseñanza; así, a pesar de que se presentan ciertas características no se logra desarrollar un contrato de explicación.

En la relación establecida durante esta clase, se observa al maestro tomar la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. El profesor intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno. Ante esta acción, de acuerdo con Brousseau el profesor establece un contrato fuertemente didáctico, basado en la ostensión.

Específicamente en la relación didáctica entre maestro y alumno, el maestro pasa la mayor parte del tiempo frente al grupo o junto a los niños mostrando las nociones y las reglas que implica restar, luego incorporando y diciendo, o reafirmando los procedimientos del algoritmo a seguir. Si en el primer intento, con la muestra o exposición, estos conocimientos no son comprendidos por los alumnos, entonces se repite la demostración de cómo operar cuando se resta, ya sea con material, o con un gráfico, para explicar cómo se aplica el algoritmo de la resta; en caso de descubrir un error de procedimiento en el algoritmo, el maestro intenta aclararlo, recordando a sus alumnos las reglas. Ante estas condiciones se establece un contrato didáctico basado en la ostensión.

En complemento, el profesor ayuda a los niños a realizar la tarea, sugiere y muestra cómo hacerlo, ejemplifica a los alumnos con el trabajo o dificultad de otro compañero, continuamente realiza preguntas de cómo proceder o del resultado, muestra frecuentemente el problema a resolver, da a evaluar al grupo los resultados encontrados, hace participar directamente a los alumnos, exige explicaciones, llama la atención constantemente a quienes interrumpen.

Por su parte, los alumnos se responsabilizan por mantenerse atentos a las exposiciones que hace el maestro en el pizarrón o a las explicaciones que hace en voz alta a alguno de sus compañeros; proporcionan las respuestas que se les demanda como muestra de su aprendizaje; anotan en su cuaderno los ejemplos realizados;

recuerdan y memorizan los procedimientos que implican sumar o restar; resuelven ejercicios y problemas para aplicar los conocimientos adquiridos. Su compromiso es demostrar que han memorizado cómo operar con el material (tabla del sistema decimal, cuadros para las unidades sueltas y tablas con valores de decenas y centenas) para solucionar una resta.

Sin embargo, pese a la responsabilidad del maestro por enseñar cómo operar y proceder cuando se resuelve una resta, se observa que trata de recordar a sus alumnos cómo descomponer unidades de mayor valor para poder restar. No obstante, en una fase de este proceso el maestro se desespera e incurre en decirles a los alumnos qué deben hacer. Aunque el objetivo por enseñar no desaparece por completo, sí afecta la calidad de lo que se pretende enseñar, lo que da lugar al *efecto Topaze* (Brousseau, 1997) en que el profesor explica un conocimiento incompleto, sugiere claves y en algunos casos da la respuesta, por lo que se podría perder el objetivo de la enseñanza.

Como consecuencia de buscar las respuestas correctas de los alumnos, es el mismo profesor quien en su intento por enseñar incurre en decir al niño cómo hacerlo, que no es el sujeto epistémico -el que busca obtener una solución impelido por las exigencias de una situación- sino el alumno (el sujeto didáctico) quien busca responder al profesor, aun sin significado; no es necesariamente el trabajo que promueva el desarrollo cognoscitivo, sino las respuestas correctas que busca el profesor.

6.5.2.2 Del proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta

En la primera clase impartida en el mes de septiembre, se observa que en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta, el profesor trata de introducir estos conocimientos a través del planteamiento de problemas sencillos que implican uno ó dos dígitos, que deben resolver con material, en principio y después relaciona esta práctica con el aprendizaje del algoritmo escrito de la suma, pues la resta sólo se resuelve con material.

Se observa en la actividad 2 el planteamiento de un problema de cambio con adición. Los alumnos tienen la obligación de copiarlo del pizarrón y escribirlo en su cuaderno. Primero el profesor formula preguntas de qué deben hacer, les proporciona material y les recuerda que pueden utilizarlo, incluyendo sus dedos; regresa a los alumnos la responsabilidad de buscar una solución sólo mediante el empleo y el conteo con material, el cálculo por otro medio

no se considera válido. Durante el proceso de solución, el profesor observa las estrategias de conteo de los niños y trata de que éstos las mejoren, indicándoles en algunos casos cómo contar a partir del número mayor, y no todos los elementos a partir de uno.

En el segmento de la actividad 3 el profesor pide a los niños que recuerden cómo sumar por escrito (operación sencilla con uno y dos dígitos), recordando conocimientos previos, (una característica de los contratos constructivistas). Sin embargo, éste se centra más en la explicación frente al pizarrón, ya sea que él la realice o algún alumno, de cómo resolver el algoritmo de la suma, basando su enseñanza en la ostensión. Se observa la intención del profesor por dar a conocer la suma, el centrarse más en la enseñanza del algoritmo, se observa la necesidad de que en sus explicaciones o demostraciones trate de integrar el funcionamiento y el concepto del valor posicional, y se discuta más el problema, tratando de aprovechar su forma de enseñar.

Con respecto a la segunda clase, que se impartió en octubre, el profesor nuevamente trata de introducir el aprendizaje de la suma y la resta a través del planteamiento de problemas de cambio y combinación, derivados del libro, que implican sólo uno o dos dígitos, y que deben resolver en principio con material, y en el que se sigue trabajando el algoritmo de la suma, pues la resta continúa resolviéndose con material.

En esta clase se resuelve un problema de cambio con la aplicación del algoritmo, donde se nota que algunos niños aún desconocen el procedimiento formal, ante esto el maestro escribe el algoritmo en el pizarrón, traza una línea vertical para separar las unidades y las decenas, recuerda las reglas del valor posicional y por dónde empezar a sumar.

En la clase anterior el maestro intentó enseñar la suma mediante la resolución de un problema, y las preguntas del profesor ayudaron al niño a encontrar la solución correcta. Sin embargo, sería importante que el profesor también formulara cuestiones que permitieran al niño reflexionar sobre el concepto de la suma y su relación con el procedimiento de solución, además de plantear otro tipo de problemas más complejos, como son los de igualación y de comparación. En cuanto al algoritmo de la suma, el maestro trata de integrar el conocimiento y la aplicación de las reglas del valor posicional, específicamente de empezar a sumar por las unidades, sin aceptar los procedimientos espontáneos de los niños, mismos que podrían emplearse como base del conocimiento formal que el maestro enseña.

La tercera clase, impartida a principios de enero, ejemplifica mejor este proceso de la enseñanza de la suma, en donde el profesor continúa introduciendo la práctica de la suma con material y después se aplica el algoritmo sobre el pizarrón. En el primer ejercicio realizan operaciones sencillas de suma sin transformación con tres dígitos. El profesor puntualiza pidiendo a los niños iniciar por el lugar de las unidades, seguir con las decenas y las centenas; los niños deben seguir este proceso y anotar la operación basándose en el trabajo del pizarrón.

En la actividad 2 el maestro introduce la práctica de la suma con transformación de tres dígitos, con material (utilizan recortes de papel: cuadritos sueltos para unidades, tiras con 10 cuadritos para decenas y tablas con 100 cuadritos para centenas).

Al trabajar con material algunos niños presentan dificultad cuando obtienen más de diez cuadritos, porque no se percatan de que tienen más de 10 y que deben cambiar por una hilera de 10, sin embargo el profesor lo observa y pide que cambien por una tira de 10. Más adelante, cuando trabajan con el algoritmo de la suma, se observa que los niños aún continúan con dificultad para integrar unidades de mayor valor, pues en algunos casos desconocen cómo proceder cuando obtienen más de diez unidades.

Otra dificultad en la aplicación del algoritmo de la suma, es que algunos aún no consideran el valor posicional de los números y los anotan sin importar el lugar. Otra error es que al obtener más de diez unidades, llevan la decena correspondiente hasta el lugar de las centenas.

En estos casos el profesor interviene para mostrar el error sin dar explicación o justificación alguna, sólo pidiendo que corrijan el error.

En este ejemplo de clase, el maestro dicta una suma con transformación, donde los niños deben representar las cantidades con material, es decir representar cada valor con unidades sueltas (cuadritos), con decenas (hileras de 10 cuadritos) y con centenas (cuadrícula con 100 cuadritos), después sumar las dos cantidades con ese material realizando los cambios necesarios, finalmente deben realizar la suma por escrito.

M - maestro, Ns - niños, Na - niña, No - niño, O - observador

M: [Después de resolver una suma sin transformación el maestro dice:] Otra suma. Primero 355…fórmenlo en su tabla.

Ns: [Forman el 355 con sus tablas].

M: [Revisa que tengan el 355 representado] A ese 355 le van a sumar 255, aparte de ese pongan 255 [se acerca a los niños y repite varias veces]… estamos haciendo suma 355 más 255 [ayuda a contar a un niño] 230, 240… te faltan, son 255.

No: [El niño agrega de 10 en 10].

M: [Pasa al pizarrón] ¡Pongan atención…Zahori, Janneth! [sobre el pizarrón dibuja una cuadrícula y explica] A ver, si tienen 10 cuadritos no lo pueden dejar así, tienen que cambiarla por una de éstas [muestra tira con diez]... y así hagan sus cambios [revisa los ejercicios]… no veo que hagan sus cambios... ¿ya los hicieron?

Ns: [Cambian diez cuadritos por una tira de diez y diez tiras de diez por un cuadrado de 100 cuadritos, la mayoría de los niños ya lo hicieron, los niños cuentan con su pareja. Se observa que algunos niños ya lo entendieron y otros no…]

M: [Pasa al pizarrón y resuelven entre todos]…Esta (otra suma) la van a resolver solitos… quienes ya entendieron cómo se lleva no pongan esto [señala rayita arriba de las decenas] y quienes no, pónganlo para que vayan entendiendo [Escribe suma en pizarrón]

$$\begin{array}{r} 346 \\ +144 \\ \hline \end{array}$$

¡Resuelvan solitos o con su material!…

[Algunos niños ya lo resolvieron y lo llevan a calificar, sin embargo, han olvidado poner la rayita del resultado].

M: No olviden poner la raya… no se les olvide poner la raya.

No: [Un niño lleva a calificar].

M: ¡El signo no va afuera!

Na: [Diana lleva a calificar… regresa cabizbaja y enojada a su asiento].

M: Para eso está tu material, Diana, si no puedes así…

[Se observa que al igual que varios niños que han llevado a revisar, Michel lleva el uno de las decenas hasta el lugar de las centenas].

M: Michel, esta decena debe ir arriba del cuatro [El maestro dice dónde llevar].

No: [Corrige].

M: Ahora suma esto, ¿cuánto te da?… [El maestro pasa al pizarrón y explica cómo hacer la suma… hace notar el error de que están

llevando las decenas hasta el lugar de las centenas]. ¡Algunos niños están sumando las decenas con las centenas y así no es, tienen que sumarlas con las decenas!].
Actividad 3 [Los niños han resuelto la suma de: $\begin{array}{r} 320 \\ +115 \\ \hline \end{array}$]

Después el profesor dice:
M: Vamos a hacer un problema, esa suma la vamos a llevar a un problema… dice así: [escribe en pizarrón] El papá de Pedro le dio $320 pesos por estudiar y su mamá le dio $115 ¿Cuánto dinero reunió Pedro? Leemos el problema…
Ns: [Leen todos].
M: ¿Qué operación vamos a emplear? [El maestro responde que una suma] ...Una suma.. resuelven y traen, si tienen dudas pregunten.
Ns: [Copian problema, leen en voz baja].
M: [Camina entre las filas de los niños, los observa y va diciendo]…La suma la debo ver en su cuaderno… si tienen duda pregunten al compañero de al lado… en lo que resuelven ese problema, les califico su tarea…
Na: [Diana dice:] No la traje…
M: Ya saben que quien no la trajo no sale al recreo…
[Abraham fue de los primeros en llevar a calificar y estuvo correcto].
O: [Observador pregunta a niño] ¿Por qué empleaste una suma…?
No: El maestro dijo…
O: ¿y tú por qué crees?
No: ...por el signo…
Ns: [Resuelven entre todos el problema].
M: [Revisa soluciones, observa que varios niños escriben los números de la suma independientemente de su valor posicional, y el maestro explica] Los números no pueden ser así… tenemos tres números arriba y tres abajo [señala los números de la suma] si no me escriben el resultado no se los voy a tomar como buena…
[Los niños resuelven dos problemas más… la secuencia de solución es la misma].
M: Escriban y resuelvan este problema: “José estudió 125 páginas en mayo y 110 en junio. ¿De cuántas páginas es el libro que leyó José?“

Na: ¿Lo sumamos o lo restamos?
No: Sumas.
M: Estamos trabajando sumas.

En la tercera clase, los niños deben resolver la suma primero mediante el uso y su representación con material, y después resolver a través de la aplicación del algoritmo por escrito. El maestro trata de enseñar el conocimiento formal para finalmente llevar la suma a un problema, y de esta manera llegar al conocimiento abstracto. En esta última parte trata de explicar las reglas de cómo operar con el valor posicional en el momento de aplicar el algoritmo, sin embargo, no hay reflexión por el alumno ni respuestas que garanticen su entendimiento. Ante estas condiciones didácticas, el maestro permanece mostrando un contrato basado en la ostensión.

Este proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma continúa centrado en el procedimiento correcto del algoritmo, y en la explicación básica de cómo integrar las decenas o centenas. Al no haber reflexión por parte de los niños y limitarse a seguir las reglas, la enseñanza deja de lado la parte conceptual.

Es importante agregar que durante la evaluación se observaron dificultades en algunos niños en la aplicación del algoritmo de la suma. Esto podría representar un conocimiento fragmentado o incompleto en el niño, y dónde el maestro no exploró, ni se cuestionó sobre cómo era ese “conocimiento” en el momento de tratar que los niños comprendieran cómo integrar y ubicar las decenas y las centenas, al sumar.

Hasta aquí, este análisis permite observar un tipo de enseñanza centrada en la parte procedimental o algorítmica del conocimiento matemático, donde el profesor enfatiza la enseñanza de: los procedimientos correctos, la aplicación de las reglas del valor posicional y de composición aditiva, pese a las dificultades que llegaron a presentar los niños. Esto corrobora la relación entre lo que ocurre durante la práctica escolar y las concepciones del maestro.

Por ejemplo, en su concepción expresa que una de las grandes preocupaciones de la educación en matemáticas, es el aprendizaje basado más en la memorización y en el entrenamiento de las operaciones a nivel del simple algoritmo que su relación con la parte conceptual. Sin embargo, esta situación se presenta en su clase.

Aun cuando el profesor trata de aproximarse a la dificultad de la enseñanza de las matemáticas en segundo grado, como la comprensión conceptual y algorítmica de la suma y la resta, y la comprensión de los principios del valor posicional de composición aditiva, no se responsabiliza de la falta de razonamiento de sus alumnos.

Finalmente, la cuarta clase se centró en la resolución de dos problemas que implicaban resta, y la resolución de varios ejercicios del algoritmo de la resta con transformación, donde únicamente se practicó una vez la suma.

Con relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la resta, el profesor trató de introducir este conocimiento, como lo había hecho en clases anteriores, primero a través del planteamiento de un problema y la aplicación de algoritmos con tres dígitos que implican restas con y sin transformación, que deberían resolverse con material, con el empleo de dibujos gráficos y finalmente solucionar con el algoritmo de la resta.

De la segunda a la cuarta actividad se observa la solución de tres operaciones de resta con y sin transformación. Se nota que durante la solución del algoritmo, los niños presentan dificultad con las restas que requieren transformación, precisamente en el momento de tener que descomponer o "pedir prestada" una decena.

Una vez que han resuelto el problema antes citado, y ante la problemática que ha captado, el maestro decide realizar una serie de ejercicios con la resta. Trata de explicar el procedimiento durante la descomposición de ciertos valores mayores en unidades de menor valor y su funcionamiento en el momento de resolver el algoritmo de la resta. Recuerda las reglas de cómo proceder en restas que implican transformación. En este proceso el profesor trata de ilustrar primero con un gráfico, explicando y pidiendo que deben pedir "prestada una decena y convertirla en diez cuadritos" (unidades) y después sumarlos con los que ya se tenía y de esta forma poder restar la cantidad sugerida, además de señalar que el número al que se pidió prestado disminuye una unidad de valor, y así continuar con el proceso de sustracción hasta las centenas. La explicación anterior la da a los niños utilizando material y finalmente trata de llevar la explicación anterior con la solución del algoritmo de la resta por escrito.

Es cierto que el profesor intenta explicar en forma grupal o individual, mediante las estrategias ya descritas, sin embargo, la solución del algoritmo de la resta que implica transformación continúa causando dificultad a los niños. En la quinta actividad se nota que la mayoría de los niños siguen el patrón de escribir la operación conforme aparecen los datos, se observa la dificultad para analizar y reflexionar la relación entre las variables del problema, así como utilizar adecuadamente los datos al escribir el algoritmo. Con ello se demuestra nuevamente un conocimiento matemático caracterizado por seguir procedimientos y estrategias aprendidas de los ejercicios hechos, sin un razonamiento o explicación conceptual.

Por otra parte, en cuanto a las dificultades de la instrucción y que posiblemente afecte la comprensión de los conceptos por el niño, es la forma en que el maestro utiliza el lenguaje durante su instrucción, caracterizado por el empleo de términos o palabras centradas más en "la matemática escolar o cotidiana" diferente al lenguaje de la "matemática de los matemáticos científicos" (Laplante, 1996; Mercer, 1996), puesto que en su práctica, en su vocabulario, en sus exigencias, etcétera, el profesor pone en juego "conceptos" o "leyes" cuyo objetivo es permitir la acción del alumno y justificar las decisiones del profesor (Brousseau, 2000).

Por ejemplo, hay un momento en que el profesor, al explicar la descomposición de una decena, utiliza un lenguaje metafórico cuando se refiere a una acción del principio de composición aditiva, la de descomponer una decena en unidades, siendo que durante el proceso de enseñanza el uso del lenguaje adecuado se considera indispensable para transmitir un conocimiento científico, de otra manera se limita el uso de conceptos formales que los niños deberían apropiarse, lo que podría desviar el objetivo de la enseñanza original, ante un uso excesivo de las analogías.

De acuerdo con lo anterior, este proceso que sigue la enseñanza-aprendizaje de la resta continúa centrado en el procedimiento correcto del algoritmo, y en la explicación básica de cómo poder "descomponer" las unidades de valor y en su caso sustraer. Al no haber reflexión por parte de los niños, de limitarse a seguir las reglas y aplicación del algoritmo, se estaría limitando la comprensión formal de aspectos conceptuales como la importancia que tiene conocer el valor posicional de los números, la desintegración de unidades de diferente valor y su aplicación en la solución del algoritmo de la resta.

Podría decirse que implícitamente el profesor intenta enseñar estos conocimientos de un modo *sencillo* con los niños, sin lograr una integración formal de estos conocimientos señalados. Por lo que si el profesor ya ha logrado mostrar estos conocimientos a sus alumnos, debe aprovechar y buscar otras actividades y estrategias que culminen con la enseñanza del conocimiento formal de la suma, la resta, y la integración del conocimiento del sistema decimal en la solución de diversos tipos de problemas.

6.5.3 Los problemas como base para el aprendizaje matemático

Ante la diversidad de estrategias y/o formas utilizadas en la búsqueda del aprendizaje o la construcción de conocimientos específicos, el aprendizaje basado en problemas resulta clave en los actuales modelos de enseñanza constructivista. De acuerdo con Díaz Barriga (2005), el aprendizaje basado en problemas consiste en el planteamiento de una situación problemática, donde su construcción, análisis y/o solución constituyen el foco central de la experiencia, y donde la enseñanza consiste en promover deliberadamente el desarrollo del proceso de indagación y resolución del problema en cuestión.

Suele definirse como una experiencia pedagógica de tipo práctico organizada para investigar y resolver problemas vinculados al mundo real, la cual fomenta el aprendizaje activo y la integración del aprendizaje escolar en la vida real. Como metodología de enseñanza, el aprendizaje basado en problemas requiere la elaboración y presentación de situaciones reales o simuladas –siempre lo más auténticas y holísticas para los niños– relacionadas con la construcción de conocimiento o el ejercicio reflexivo de determinada destreza en un ámbito de conocimiento, práctica o ejercicio profesional particular.

El aprendizaje basado en problemas puede entenderse y trabajarse en una doble vertiente: en el nivel del diseño del currículo y como estrategia de enseñanza (Díaz Barriga y Hernández, 2002; Edens, 2002; Posner, 2004, cit. en Díaz Barriga, 2006). En ambas vertientes, el interés estriba en fomentar el aprendizaje activo, aprender mediante la experiencia práctica y la reflexión, vincular el aprendizaje escolar a la vida real, desarrollar habilidades de pensamiento y toma de decisiones, así como ofrecer la posibilidad de integrar el conocimiento procedente de distintas disciplinas.

Por otra parte, Reigeluth (2000) sostiene que el modelo educativo requerido en la nueva era de la información tiene como rasgos más notables el aprendizaje cooperativo, la reflexión, las habilidades de comunicación, las aptitudes para resolver problemas y construir significados, y el papel del docente como preparador cognitivo o facilitador del aprendizaje.

Por su parte, Brousseau (2000) en su teoría de las situaciones didácticas, considera un problema o ejercicio no como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio al que "responde el sujeto" siguiendo algunas reglas.

Ubicados en el campo de las matemáticas, diversos autores (p. ej. Vergnaud, 1997; Mendoza, 2004) en su análisis refieren que un problema puede ser entendido como "una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para lo cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución". La práctica y solución continua de los problemas puede transformarlos en ejercicios, por lo que es necesario diferenciar entre lo que es un ejercicio y lo que es un problema. De acuerdo con Pozo (1998) un problema se diferencia de un ejercicio, en que en este último se dispone de mecanismos que llevan de forma inmediata a la solución y que se puede convertir en algo rutinario.

De acuerdo con los planteamientos y programa de la SEP (1999), se tiene que el planteamiento y la solución de problemas son la base para que los niños construyan su conocimiento matemático. Dentro de estos planteamientos destacan las siguientes características del enfoque que tiene como fundamento principal la resolución de problemas (SEP, 1999):

a) La actividad del niño enfrentado a situaciones problemáticas es el punto de partida y el elemento central de las secuencias didácticas que se proponen.
b) En la variedad de problemas que se presentan a los alumnos radica la significancia de los aprendizajes construidos o en vías de construcción.
c) En el proceso de resolución de problemas se elaboran estrategias personales de resolución.
d) El diálogo y la confrontación de resultados y procedimientos entre los niños contribuyen al aprendizaje.
e) El aprendizaje es entendido como un proceso caracterizado por

aproximaciones sucesivas, mediante el cual los niños tienen acceso a representaciones y procedimientos cada vez más formales.

f) La función del profesor será coordinar las discusiones, plantear situaciones didácticas que permitan analizar los contenidos de forma gradual, y advertir los momentos en que podrá llevar a los alumnos a seguir las estrategias convencionales.

Al tomar como referente las características anteriores del enfoque que tiene como fundamento la resolución de problemas en el programa de la SEP (1999) y lo que ocurre en la clase del maestro de segundo año, en un primer análisis se observa la intención del profesor por enseñar el conocimiento de la suma y la resta sustentado en el planteamiento de problemas, apoyado con el uso estratégico de materiales y en el caso más avanzado, que solucionen con un algoritmo. Sin embargo, el maestro, al plantear en su clase una serie de problemas sencillos de agregar y quitar, hace que los niños utilicen la misma estrategia de conteo, sustrayendo o agregando cantidades, lo que sería una enseñanza basada más en la solución de ejercicios (Hembree y Marsh, 1991; Pozo, 1998; Mendoza, 2004) que de problemas.

En cuanto a la calidad de problemas planteados, en las clases analizadas del maestro de segundo grado, éstos quedan enmarcados en una serie de ejercicios más que de problemas. De acuerdo con sus características, se observan ejercicios que son solucionados con estrategias o técnicas procedimentales y rutinarias. Al respecto, Pozo (1998) plantea que con el tiempo los problemas, al ser solucionados repetidamente, pasan a ser ejercicios, con la necesidad de plantear nuevos problemas, que sean innovadores y donde sea necesario que el niño emplee sus estrategias y conocimientos matemáticos, que al ser utilizados permitan desarrollar más estrategias y que logre incrementar o generar un conocimiento matemático nuevo.

En cuanto a la diversidad de los problemas, se observa en las clases el planteamiento de problemas sencillos de comparación y de cambio, que establecen una relación sencilla entre las variables que implican la adición o sustracción. En las dos últimas clases se considera el manejo de cantidades hasta con tres dígitos, siempre con la incógnita al final. Predominan los problemas por aplicar y la ausencia de problemas por descubrir, y relacionados en su contenido con el eje de los números y sus relaciones y operaciones.

El planteamiento de preguntas es de bajo nivel cognitivo, hay total ausencia de problemas planteados por los alumnos, son más bien problemas planteados por el profesor y con el apoyo de actividades del libro, en donde los niños llegan a participar esporádicamente y sólo en la aportación de los datos a incluir, sin un trabajo reflexivo del alumno.

En general, después del análisis de las cuatro clases anteriores del maestro, se observa que en el planteamiento de problemas, el profesor basa su clase en algunos momentos en el libro y que también en sus concepciones lo considera como un recurso para apoyar sus clases, además del juego y de materiales diversos. Ante este práctica con escasos problemas sencillos, se muestra la necesidad de incluir situaciones o una diversidad de problemas que establezcan diferentes niveles de complejidad entre sus planteamientos, más contextualizados, además de que durante su resolución se incluyan en el diálogo preguntas que permitan la reflexión y la comprensión de los alumnos.

Durante estas clases, el proceso de enseñanza-aprendizaje sigue una secuencia donde la interacción para la discusión de procedimientos y resultados es mínima, se observa más un trabajo individual del alumno. Una observación en esta clase semejante a la que realiza Claudine (2003), es que el trabajo del profesor parece que consiste en ofrecer a los alumnos un procedimiento para resolver los problemas, que posiblemente dificultaría o no permitiría la comprensión conceptual por parte del alumno, pues no se funda en el análisis del trabajo que se tiene que realizar y porque no permitiría un trabajo cognitivo del niño con respecto al trabajo matemático específico que está en juego.

Brousseau (1997) plantea desde la teoría de las situaciones didácticas que en la moderna concepción de la enseñanza, se requiere el maestro para provocar la adaptación esperada en sus estudiantes por una elección juiciosa de los "problemas" que pone frente a sus estudiantes. Problemas elegidos de tal forma que los estudiantes puedan aceptarlos, que puedan hacer actuar a los estudiantes, hablar, pensar e involucrarse por su propia motivación.

Los resultados anteriores de este trabajo, en cuanto a la solución de problemas como base para la enseñanza de las matemáticas, son muy similares a los resultados presentados en el estudio de Mendoza (2004, coord. por Ávila), que realizó con grupos de segundo, cuarto y quinto grado de educación primaria pública, acerca de una inclinación de los profesores por el planteamiento de preguntas de bajo nivel cognitivo, poca presencia de problemas planteados por los alumnos, predominio de los problemas por aplicar, y mayor asociación de los problemas con el contenido del eje de los números, sus relaciones y operaciones.

En otro punto, en el análisis de la estructura y de la forma como transcurren las clases (Lemke, 1997), se observa en una primera parte la introducción a la clase, el profesor recurre a la exposición sobre el pizarrón, al repaso de conocimientos relacionados con las reglas del algoritmo de la suma, el trabajo individual de los alumnos, y a la discusión grupal de los resultados obtenidos. Sin embargo, uno de los principales patrones para la enseñanza, en la estructura de la actividad más común, que describe Lemke (1997) es el *diálogo triádico*, en donde el profesor plantea preguntas, pide a los alumnos que respondan y evalúa las respuestas. Cuando las respuestas son correctas se reafirma lo que dice el alumno y en caso contrario se corrige.

Finalmente, al comparar la forma en que ocurre la instrucción entre los dos profesores durante la enseñanza y aprendizaje de estos conocimientos matemáticos, se observa que la maestra de primer grado, en sus prácticas educativas analizadas, no recurre al planteamiento de problemas de suma o resta.

En cuanto al tipo de relación didáctica que los profesores establecen con sus alumnos, se observa que la maestra de primer grado se centra en la enseñanza de los números (numeral y cardinal), en la solución de sumas en su mayoría con material y muy escasamente en la resta.

En su labor de enseñanza la maestra continuamente muestra el material a los niños, frente al grupo expone cómo sumar con el material, en otras ocasiones pide que uno de los niños pase al frente para mostrar a sus compañeros que ha aprendido cómo realizar una suma o cómo contar, lo que daría lugar a clases sustentadas en un contrato de ostensión.

Sin embargo, la maestra pide continuamente que los niños se fijen y realicen los ejercicios de conteo o de suma, insiste en que repitan cuantas veces sea necesario los ejercicios que plantea, con la intención posible de que con esto aprenderán, lo que daría lugar al predominio de los contratos que van del de reproducción formal al de condicionamiento, basados en la realización de los ejercicios

y en la repetición constante de éstos. Sin embargo, podría limitar y dificultar el aprendizaje matemático del niño, situación que es reconocida por la misma maestra en la última clase, en la que a los niños aún se les dificulta reconocer la cardinalidad del número en cantidades menores.

En cuanto al maestro de segundo grado, se observa su interés por mostrar y explicar una y otra vez cómo proceder para solucionar los algoritmos de la suma o la resta, incluso pareciera que llega a agotar sus recursos y estrategias, como fue el caso en que explicó diversas estrategias como la representación con material, un diagrama dibujado sobre el pizarrón, hasta sus intentos por integrar y explicar estos conocimientos del valor posicional y de la composición aditiva, en una operación por escrito sobre el pizarrón, pidiendo continuamente que pase alguno de los alumnos a resolverla y, en su caso, que los demás niños permanezcan atentos y contribuyan a resolverla bien. Con estas estrategias de mostración y exposición se da lugar al contrato de ostensión.

En la clase del maestro, ante el empleo del contrato de ostensión, éste parece que contribuye más a la adquisición de los algoritmos de la suma y la resta, a la resolución de ejercicios que implican el reconocimiento del valor posicional y de la composición aditiva, tal como lo muestran sus avances en los resultados grupales. Sin embargo, escasamente se promovería el entendimiento conceptual de la suma y la resta, pues aún se observan dificultades en los niños al aplicar los algoritmos correspondientes, así como dificultades en la forma de operar con el valor posicional.

Los conocimientos que adquieren los niños de segundo grado, bajo el contrato de ostensión, quedan en duda, como se observa en los estudios de caso, cuando solucionan problemas aditivos de diferentes tipos, que prefieren solucionar con sus propias estrategias de cálculo o conteo (que no eran permitidas en clase cuando se enseñaba el algoritmo formal), y en las que muy difícilmente podrían emplear los conocimientos adquiridos como herramientas derivadas de su conocimiento formal que el maestro enseña. Por lo que sería necesario incentivar a los profesores para que se acercaran a desarrollar contratos didácticos *constructivistas* o *basados en saberes previos*, donde se pueda promover más los conocimientos conceptuales de la suma y la resta en la solución de problemas aditivos.

Por otra parte, se observa en ambos maestros la ocurrencia del “efecto Topaze” (Brousseau, 1997, 2000; Ávila, 2001a, 2001b) que ocurre constantemente y en mayor medida con la maestra: en los momentos de ofrecer alguna explicación a los niños, terminan por sugerir pistas, interrogantes o en último de los casos, dar la solución a los problemas; no se pierde el objetivo total de la enseñanza pero sí podría afectarse, al no ser el mismo niño quien lo entiende o explica, por lo que esto dificultaría o imposibilitaría que el niño adquiera el aprendizaje que se pretende.

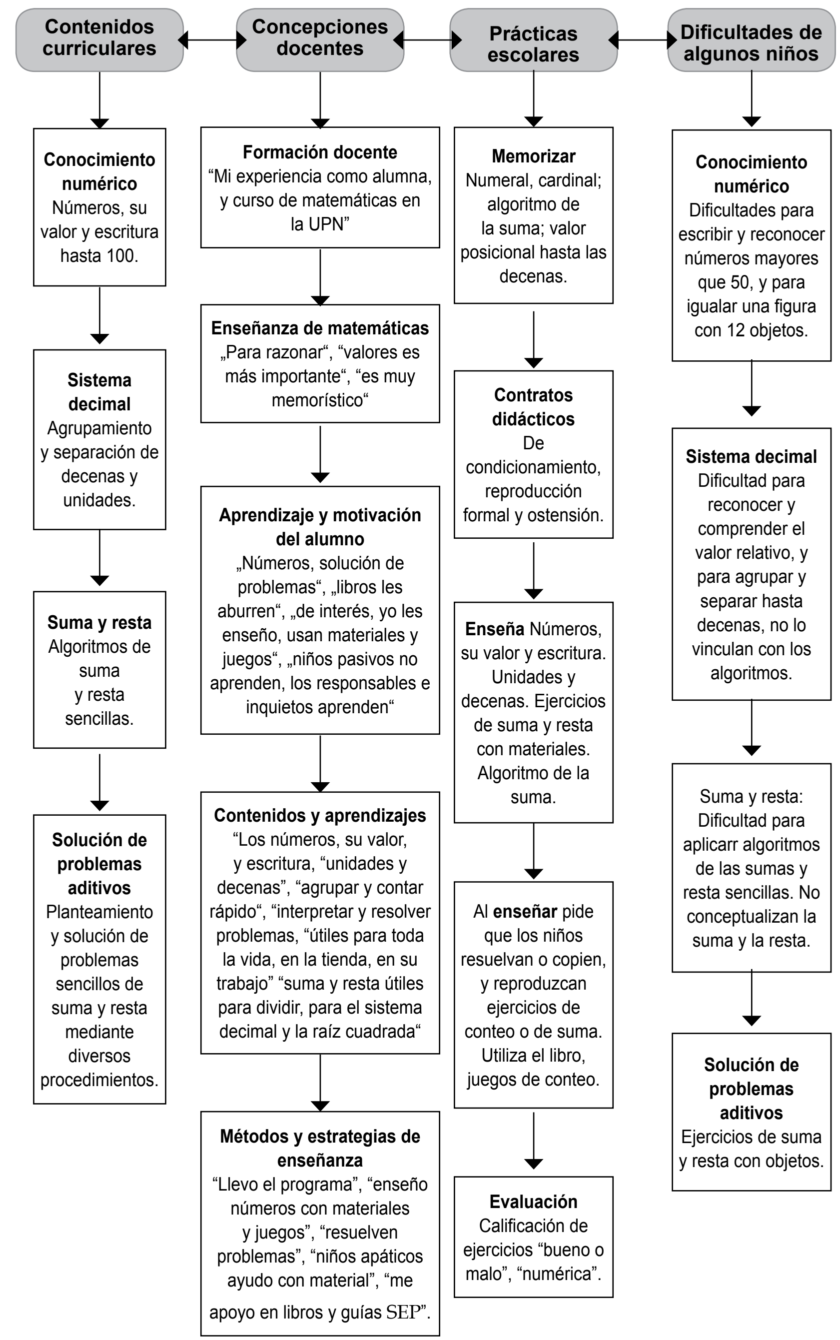
En cuanto a los contenidos temáticos que se tratan en las clases analizadas, la maestra centra sus actividades en el conteo, el reconocimiento de la cardinalidad y de los numerales, la representación del valor de las decenas, la adición y la sustracción con material, y el algoritmo de la suma con un resultado basado en la solución mediante el conteo y no en el procedimiento del algoritmo como tal, no se observa el trabajo del algoritmo de la resta y escasos ejercicios de sustracción. Se observa una enseñanza de las matemáticas basada en una serie de ejercicios repetitivos, con ausencia de problemas. En el caso del maestro de segundo grado, sus clases se ubican en la solución de algoritmos con y sin transformación de la suma y resta hasta con tres dígitos, en el conocimiento del valor posicional y de la composición aditiva, en algunos problemas de adición y sustracción y sus respectivos algoritmos. Se observa una enseñanza basada en la constante solución de ejercicios, que puntualiza la ejecución correcta de los algoritmos, de la operatividad del valor posicional, con la necesidad de contextualizarse en problemas auténticos que promuevan el desarrollo no sólo algorítmico sino también de su concepto, guiando y apoyando a los alumnos hacia un conocimiento que integre más conocimientos matemáticos.

Finalmente, en ambos maestros se observa una instrucción que se apoya en el empleo de materiales, libros, el diálogo triádico, el trabajo en el pizarrón y el trabajo individual.

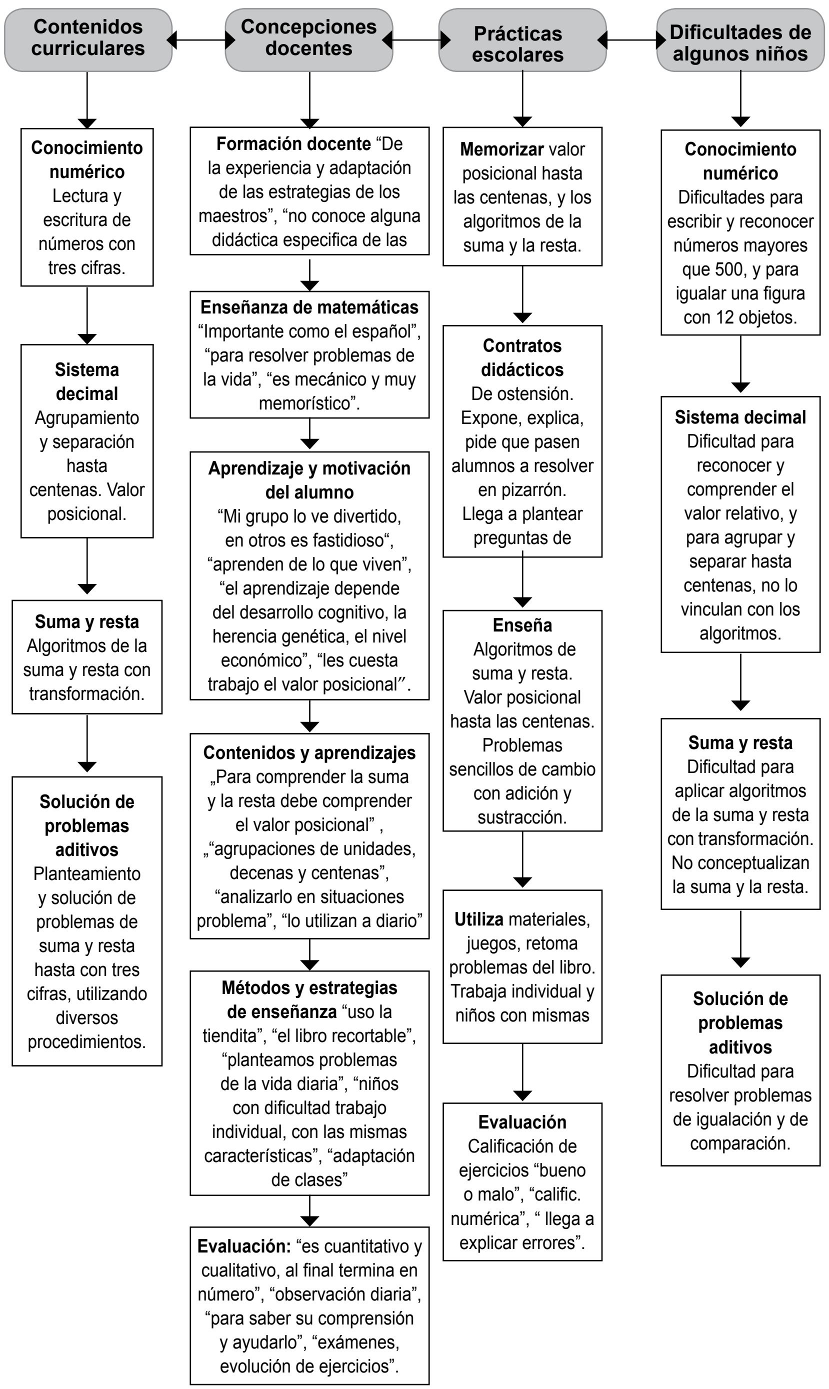
A continuación se presenta esquemas (figuras 3 y 4) donde se relacionan las concepciones del docente, su práctica y el aprendizaje de los alumnos.

6.6 Relación entre concepciones docentes, práctica educativa, conocimientos matemáticos del alumno y contenidos curriculares de la SEP.

Esquema 1. El pensamiento y la práctica de la maestra de primer grado



Esquema 2. El pensamiento y la práctica del maestro de segundo grado



Los esquemas anteriores permiten integrar y observar las relaciones y contradicciones de los maestros entre sus concepciones, su práctica y el tipo de conocimientos que los niños adquirieron durante sus clases.

Dentro de las observaciones de mayor importancia, respecto a la maestra de primer grado, efectivamente concibe y basa el contenido de su enseñanza en el conocimiento de números menores a 100, donde los resultados grupales, junto con solución de problemas, atestiguan que fue en esta área donde mejor calificaron los alumnos, sin embargo, se observaron dificultades en los estudios de caso para escribir algunos números.

Otra relación es entre lo que la maestra concibe y su práctica de estrategias y métodos de enseñanza, mediante el uso de juegos y materiales que sí ocurre en aula. Sin embargo, el uso didáctico de tales recursos, junto con el planteamiento y la solución de ejercicios simples de suma y de conteo con objetos, obedece más a los tipos de contrato didáctico bajo los que transcurre su clase, basados en la reproducción y la resolución de ejercicios y actividades descritas.

En consecuencia, el uso didáctico limitado de los ejercicios de conteo y suma, la falta de planteamiento de diversos tipos de problemas aditivos, las actividades para que los niños reconozcan el nombre y el valor de las unidades y las decenas, así como la práctica sólo del algoritmo de la suma y no el de la resta, podrían limitar conceptual y operacionalmente el aprendizaje de estos conocimientos, tal como lo demostraron los resultados grupales y de caso, que fueron los más bajos en solución de operaciones de resta y suma, y del sistema decimal.

Por último, la maestra concibe una evaluación sumativa y dice practicar la evaluación formativa con características constructivistas; sin embargo, en el aula se observa únicamente la revisión y calificación numérica de los ejercicios, en función de si el resultado es correcto o erróneo.

Con respecto al maestro de segundo grado, se observa una mayor coincidencia entre su forma de concebir los contenidos y aprendizajes que los niños deben lograr y los planteamientos del curriculum de la SEP, que son: conocimiento de números con más de tres cifras, operaciones de sumas y restas sencillas y con transformación hasta con tres cifras, el conocimiento del valor posicional hasta las centenas, y la solución de problemas que impliquen operaciones de suma y resta.

El profesor centra su enseñanza en los contenidos antes mencionados, y de acuerdo con los resultados grupales de la segunda evaluación, los niños lograron resultados aceptables en términos numéricos en todas estas áreas. Sin embargo, considerando las áreas de mayor dificultad y los estudios de caso, lo que más les cuesta trabajo comprender a los niños es el valor posicional, el algoritmo de la resta, así como el concepto que implican la suma y la resta; esta dificultad la demostraron los niños cuando preferían solucionar los problemas de la prueba con sus propios algoritmos naturales, en vez de recurrir a los formales enseñados por el docente.

Estas dificultades que presentan los niños posiblemente tienen relación con las estrategias y formas de enseñar del profesor, en las que además del uso constante de materiales, se basa principalmente en la exposición y la explicación de los conocimientos a enseñar, que caracteriza a los contratos de ostensión. Por ello sería importante que el profesor, además de incrementar el planteamiento y la solución de otro tipo de problemas aditivos, pudiera plantear una serie de preguntas de reflexión que ayuden al niño a abstraer los conceptos, al tiempo de ir integrando los conocimientos del valor posicional, durante el empleo y la solución de los algoritmos de la suma y la resta.

Finalmente, el maestro concibe una evaluación que permite revisar lo que el niño va aprendiendo, ayudarlo en sus errores de comprensión y en lo que se pueda asignar una calificación, pero al igual que la maestra, en la práctica se queda en la evaluación sumativa, y con escasas prácticas de evaluación formativa. Por ello sería importante que el profesor, al igual que la maestra, pudiera integrar formas alternativas de evaluación de carácter formativo y promoviera la autoevaluación, que se traduce en toma de conciencia y regulación de los aprendizajes por parte de los propios niños. Es decir, en la práctica no se utiliza con regularidad su concepción de "evaluar para ayudar".

A partir del análisis anterior, corroboramos que conocer de forma separada las concepciones y por otro lado las prácticas de los maestros, sólo permite conocer la mitad de la historia (Kane, Sandreto, Heath, 2002) de lo que podría estar pasando en el proceso de enseñanza y aprendizaje, de ahí la necesidad de realizar investigación que considere al maestro, al alumno y las prácticas educativas de forma conjunta, para poder identificar coincidencias, contradicciones y factores que apoyan el aprendizaje en la práctica. Así, este análisis nos permite constatar que hay logros importantes promovidos por la enseñanza que imparten los profesores, pero al mismo tiempo es difícil que exista una plena coincidencia entre lo que los maestros afirman y lo que verdaderamente hacen en las aulas.

CAPÍTULO 7

Discusión y conclusiones

En concordancia con los objetivos de esta investigación, en este capítulo se revisan los principales resultados encontrados en cuanto al conocimiento matemático del niño, las concepciones de los maestros acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las prácticas de enseñanza en términos del tipo de contrato didáctico y finalmente se concluye con algunas reflexiones y sugerencias.

En primer término, los resultados grupales obtenidos mediante la *Prueba de Evaluación del Conocimiento Matemático del Niño*, mostraron que los alumnos parecen seguir un patrón evolutivo que coincide con lo encontrado por otros autores (Piaget, 1967; Labinowicz, 1987; Wadsworth, 1991), en relación con las nociones vinculadas al conocimiento matemático. Fue posible identificar un progreso en la adquisición de los conocimientos evaluados, del primero al segundo grado. Dicho progreso se manifestó en un incremento estadísticamente significativo en el número de aciertos en la prueba, en la resolución de ítems cada vez más complejos y en un decremento del número de oportunidades necesarias para arribar a una solución correcta. Los cambios sustanciales en el manejo de las nociones matemáticas estriban en que los niños y niñas de segundo grado lograron un conocimiento más amplio y preciso de la noción de número, observado en la comprensión y manejo de la cardinalidad y del valor posicional, así como en el tipo de solución ofrecida ante problemas cuya complejidad implica operaciones de igualación y comparación de cantidades. En ambos grupos se identificó la existencia de estrategias o algoritmos naturales, vinculados al empleo de esquemas gráficos y a la manipulación de objetos concretos, aunque el manejo de los mismos se fue haciendo más pertinente y efectivo en los alumnos de segundo grado, a la par que les permitió transitar hacia el uso apropiado de los algoritmos formales de suma y resta en la solución del problema.

En cuanto a la identificación de diferencias entre los grupos de alto y bajo rendimiento, es importante mencionar que no se consideraron las oportunidades que los niños necesitaron para llegar a una respuesta correcta (hasta cuatro), lo cual implica que los datos estadísticos se refieren a las respuestas correctas pero no al proceso que se siguió para llegar a ellas. Igualmente es importante aclarar que no siempre las oportunidades llevaron a una respuesta correcta.

En la primera evaluación se encontraron diferencias estadísticamente significativas en todas las categorías para el primer grado, y sólo en suma y resta para el segundo grado, favorables para el grupo de alto rendimiento. Esto en alguna medida permitió cuestionar la percepción de los docentes para ubicar a los alumnos como estudiantes de bajo y alto rendimiento, por lo menos para el caso de segundo grado, ya que algunos alumnos de bajo rendimiento respondieron mejor o igual que los de alto rendimiento en la prueba administrada.

Una explicación plausible de la ausencia de diferencias marcadas entre ambos grupos, puede ser la forma de administración de la prueba misma, dado que el investigador permitía que los alumnos intentaran más de una vez la resolución de los ítems, lo cual pudo permitir a los niños con un rendimiento bajo que tuvieran la oportunidad de repensar sus respuestas y estrategias o de reflexionar el por qué habían fallado en el primer intento. En este sentido, Jordan y Montani (1997) reportan que los niños necesitan de más oportunidad y tiempo, para poner en juego sus conocimientos y estrategias, y superar las dificultades al resolver problemas aditivos de diversos tipos. Aún los escolares catalogados por el docente como alumnos de bajo rendimiento podían superar sus dificultades si se les daba la oportunidad de reflexionar y re-pensar sus respuestas, de forma que en muchos casos arribaban a procesos y respuestas correctas en un nuevo intento. Esta es una posibilidad poco explorada por los docentes en las pruebas y ejercicios que realizan en el aula con sus estudiantes. Es importante aclarar que los alumnos recibieron hasta cuatro oportunidades para resolver los problemas.

En la segunda evaluación resultaron diferencias estadísticamente significativas únicamente entre los subgrupos de bajo y alto rendimiento de primer grado, y sólo en solución de operaciones de resta y de suma favorables para el grupo de alto rendimiento. Para el grupo de segundo grado en la segunda evaluación no hay diferencias significativas en ninguna de las categorías, a pesar de que se reportan las medias porcentuales más bajas en solución de operaciones de suma y resta, y sistema de numeración decimal. En particular con el grupo de bajo rendimiento, existen avances considerables en todas las áreas para ambos grados. Igual que en

la primera evaluación, los alumnos recibieron hasta cuatro oportunidades para responder.

Específicamente, en cuanto al conocimiento del número, se consideraron diversas situaciones en su evaluación, como escritura, lectura, el conteo y la igualación de conjuntos con figuras, donde los niños resolvieron una buena proporción de estas actividades. En los resultados grupales, se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre los niños de alto y bajo rendimiento sólo en la primera evaluación del primer grado, ya que en la segunda evaluación fue mínima la diferencia. En la segunda evaluación, a pesar de que en el grupo de segundo grado no se encontraron diferencias significativas, sí las hubo en el porcentaje de respuestas correctas favorables al grupo de alto rendimiento, que logró el cien por ciento, frente a ochenta y un porciento del grupo de bajo rendimiento, siendo mayor la diferencia que en los grupos de primer grado.

A pesar de que se encuentran avances en el conocimiento del número, el hecho de que los niños puedan contar en voz alta, escribir o leer un número, no implica que tengan un conocimiento completo del mismo (Piaget, 1967; Labinowicz, 1987). Al respecto, de acuerdo a los análisis de los estudios de caso y del resto de las evaluaciones de cada grado, se encontraron dificultades diversas como: desconocimiento de un numeral mayor que 24, dificultad para escribir un número mayor que 100, dificultad para igualar la figura de un triángulo con 12 objetos, así como dificultad en otros conocimientos más complejos como el valor posicional, o su aplicación en la solución de algoritmos de suma y resta, además de la resolución de problemas aditivos de comparación e igualación, como antes se había indicado.

Sin embargo, pese a estas dificultades los niños lograron resolver con relativo éxito los reactivos de la categoría de problemas aditivos, empleando sus algoritmos naturales o informales, aun cuando no tenían una comprensión suficiente del sistema decimal y de los algoritmos de la suma y de la resta. Por ello parecería que el conocimiento o no del sistema decimal, así como de la solución de las operaciones de suma y resta empleando algoritmos formales, no impide que en los primeros grados los niños y niñas puedan arribar a la solución correcta de problemas aditivos de cambio y combinación, y en algunos casos incluso de igualación y comparación, con apoyo en el conteo y la comprensión de las cantidades involucradas.

Las dificultades que enfrentan los niños marcan el límite entre lo que saben y el conocimiento que intentan abordar, por lo tanto, este primer conocimiento del número en el niño debe ser aprovechado para la construcción de otros conocimientos más complejos, y extenderse a otros campos del conocimiento matemático.

Por otra parte, de acuerdo con investigadores, existe una diversidad de principios y operaciones lógicas implicadas en el conocimiento del número. Para Piaget (1967), el número es una síntesis de dos conceptos que el niño crea entre los objetos, el orden y la inclusión de clases. Así, el concepto de número implica las operaciones lógicas de seriación, clasificación y conservación de cantidad. Sin embargo, de acuerdo con Scheuer (2005), no todos estos y otros principios pueden estar en el conocimiento numérico de todos los niños. Se entendería que el número es un concepto polimorfo, capaz de asumir y promover múltiples sentidos, pese a que el uso particular de un número definido no puede a la vez ser cardinal y ordinal, operador, producto del conteo, algebraico, etcétera, por lo que es posible utilizar los números de acuerdo a esas diferentes perspectivas. Por tanto, los niños no construyen una noción ni una práctica únicas del número, sino nociones y prácticas múltiples, que a su vez se relacionan entre sí de muchos modos.

En esta investigación, la categoría de conocimiento del sistema decimal fue donde los niños de primer grado presentaron mayor dificultad, y de acuerdo con los estudios de caso, lo más difícil fue comprender y operar correctamente en los ejercicios que implican el valor posicional y la composición aditiva del número, en donde únicamente lograron reconocer el valor absoluto del número y no el relativo. No obstante, en los programas de la SEP (1993) se plantea que al término del ciclo escolar los niños deben conocer hasta las decenas. Esta dificultad también se encontró en la primera evaluación con los grupos de alto y bajo rendimiento de segundo grado, y en la segunda evaluación sólo en algunos niños de bajo rendimiento de segundo grado. A excepción de los niños del subgrupo de alto rendimiento de segundo grado, se puede ubicar a los conceptos antes referidos en la categoría de conocimiento de mayor dificultad.

Estos resultados coinciden con otros estudios en que el conocimiento del sistema de numeración decimal es una de las áreas con una dificultad importante de los niños en el aprendizaje de las matemáticas (Cortina, 1997; García *et al*, 2006). Aunque se espera que éste sea adquirido totalmente hasta el cuarto grado, García *et al* encontraron que niños de tercer y cuarto grado presentan serias dificultades que afectan la comprensión de otros conocimientos como son la suma y la resta.

Además, el hecho de tener conocimiento del sistema decimal no es suficiente para que los niños puedan llegar a solucionar todos los problemas que se les presenten, pero sí es básico para poder solucionarlos con base en los algoritmos formales de la suma y la resta (Carpenter *et al*, 1999) por ello se puede recomendar que para mejorar el entendimiento e interacción de dichas nociones, éstas sean enseñadas de manera concurrente a través de la solución de problemas.

Considerando que los primeros conceptos que desarrollan los niños sobre la adición y la sustracción proceden de contextos de la vida real, en los que "se da" o se "quita" algo y nunca de las expresiones numéricas en abstracto, dichos problemas deben provenir de situaciones que los niños enfrentan en la vida cotidiana (Bermejo, Rodríguez y Pérez, 2000). Por tal motivo, el tipo de problemas planteados y la orientación del maestro o maestra para arribar a su solución, debe ayudar a conectar las actividades didácticas con el conocimiento que el niño ya posee y el que se intenta mostrar.

El análisis del tipo de solución que los niños dieron en la prueba de problemas, permitió concluir que ciertamente podían resolverlos predominantemente mediante una solución tipo II ó tipo III, debido a que entraban en juego procesos de razonamiento en los que empleaban sus propios recursos o conocimientos previos, en particular, una diversidad de estrategias "naturales" o "inventadas" (Carraher *et al*, 1991; Fuson, 1992) sin la necesidad de utilizar los algoritmos formales. Estos resultados de la primera evaluación permitieron corroborar el supuesto de que los niños, además de adquirir conocimientos derivados de la educación formal o preescolar, ya cuentan con conocimientos previos que incluyen una serie de estrategias y heurísticos (Carraher *et al*, 1991; Jordan y Montani, 1997; Onrubia, *et al*, 2001)que pueden emplear efectivamente en la solución de problemas aditivos, como los que se plantean en esta investigación.

En buena medida, este hallazgo, además de corroborar lo encontrado por los autores citados, refuerza el supuesto básico constructivista de que el aprendizaje significativo se produce en la medida en que se establece una relación sustancial entre los conocimientos previos y experiencias de la persona que aprende, con los nuevos contenidos por aprender. Por otro lado, el enfrentar al alumno con la resolución de problemas que tienen sentido y la posibilidad de conectar la actividad con una situación real o vivencial (por ejemplo, la compra-venta de algo) en vez de pedirle la resolución de operaciones en el vacío, permitió situar a los niños en un contexto que les facilitó el proceso de razonamiento y la aplicación de sus propios algoritmos. Al respecto Carraher, Carraher y Schliemann, (1991) reportan que los niños responden mejor a situaciones imaginarias o simuladas en comparación a la solución de operaciones simples, abstractas y sin contexto alguno.

En la segunda evaluación aplicada a los alumnos se encontró que sigue teniendo un peso importante el empleo de dichas estrategias o procedimientos heurísticos propios. A pesar de que se observa en ambos grados un incremento del conocimiento en todas las categorías evaluadas, nuevamente destacan los resultados obtenidos en las categorías de solución de problemas y conocimiento numérico con las puntuaciones más altas. También se encontró un incremento de las puntaciones en las escalas de solución de operaciones de suma y resta, y en conocimiento del sistema de numeración decimal en comparación con la primera evaluación, lo que en buena medida es reflejo de la instrucción recibida en el transcurso de varios meses. Pero aún así, la comprensión del sistema de numeración decimal sigue siendo difícil para los alumnos, aunque es mayor el conocimiento adquirido en el grupo de segundo grado.

El análisis cualitativo de casos permitió profundizar un poco más en esta situación. Se esperaría, con base en los resultados anteriores, que si los niños de ambos grupos ya adquirieron el conocimiento de los algoritmos formales de la suma y la resta, serían capaces de utilizarlos para solucionar problemas aditivos sin tener que recurrir a procedimientos no algorítmicos. Sin embargo, los estudios de caso indican todo lo contrario, pues aun cuando ya se ha aprendido el procedimiento prescrito por el algoritmo formal, esto no es condición suficiente para que el alumno lo emplee exitosamente en la solución de problemas, puesto que es necesario que el niño comprenda sus conceptos (Carpenter *et al*, 1999; Mendoza, 2004; Orrantia, 2003; Flores, 2003, 2005; García *et al*, 2006). Sólo el niño de segundo grado considerado por el docente como alumno de alto rendimiento solucionó tres de seis problemas con el algoritmo formal de la suma y la resta (solución tipo IV). Esto indicaría

que los conocimientos algorítmicos que va adquiriendo el niño en la escuela resultarán de escasa utilidad en la medida en que no logre vincularlos con situaciones de aplicación relevantes, ya que no demuestra utilizarlos al resolver problemas aditivos. Esto corrobora la idea de que el aprendizaje a través de la mecanización, centrado en los procedimientos de los algoritmos, no debe ser un fin en sí mismo sino que debe vincularse a situaciones relevantes de aplicación que requieran procesos de abstracción reflexiva de parte del aprendiz.

Sin embargo, en el análisis de las prácticas docentes se observa que los maestros tienden a plantear y a solucionar problemas en donde las relaciones que se establecen se refieren a problemas sencillos, de cambio o combinación y no se plantean otros más complejos, como por ejemplo los de diferencia relacionados con la resta, o los de igualación entre un conjunto mayor y otro menor, relacionados también con la resta.

A pesar del avance significativo que muestran los resultados con relación al aprendizaje de los niños al transcurrir el ciclo escolar y al avanzar de grado, se considera que el entendimiento conceptual de la suma y la resta les resulta aún difícil, y en lo que se avanza es en la aplicación correcta del algoritmo, lo que conduce a la respuesta correcta en determinados ejercicios. Se coincide con los autores revisados (Carpenter *et al*, 1999; Nunes y Bryant, 1997; Cortina, 1997; Orrantia, 2003) en que el entendimiento conceptual y operacional de los principios del sistema decimal, resulta clave para entender y aplicar los algoritmos de la suma y la resta de manera razonada, de manera que el niño, al solucionar un problema, no se base únicamente en sus propias estrategias (solución tipo III).

De acuerdo con lo anterior, durante la solución de un problema por escrito, el niño efectúa un entendimiento textual y utiliza sus propios recursos de solución. En problemas que implican una relación sencilla de cambio y combinación, como fue el caso de este estudio, los niños pueden basarse fácilmente en palabras clave y elegir el algoritmo correcto de inmediato; sin embargo, esta estrategia puede verse limitada al enfrentar problemas de mayor complejidad como son los de comparación o de igualación (Orrantia, 2003), de aquí la importancia de promover en el niño un entendimiento conceptual de la suma y la resta, considerando, entre otros, el valor posicional y la composición aditiva, a través de la solución de problemas de diversos tipos.

Por otro lado, como una explicación a las diferencias entre los alumnos de alto y bajo rendimiento, se pueden plantear cuestiones relacionadas con el propio estudiante, pero siempre en interacción con el contexto educativo en que participa. De acuerdo con las explicaciones emanadas de los estudios sobre cognición y aprendizaje de las matemáticas, estas diferencias posiblemente residan en la capacidad, el grado y la forma en cómo comprenden los niños en un inicio los principios lógicos del conteo y de la numeración, como serían la cardinalidad del número o el reconocimiento de su numeral (Gelman y Gallistel, 1978). Posteriormente, y en su caso, al pasar a otros niveles de comprensión mayor, cómo logran la integración de estos principios básicos del conocimiento numérico, al arribar al nivel del conocimiento de las convenciones (Nunes y Bryant, 1997). Otra diferencia puede estar en cómo aplican las convenciones matemáticas junto con los principios lógicos de la numeración, al enfrentar situaciones matemáticas diferentes (Vergnaud, 1997). Así, el conocimiento matemático no puede limitarse a la comprensión de los algoritmos de la suma y resta, y al sistema de numeración decimal, sino que este conocimiento debe conceptualizarse en situaciones matemáticas distintas. Y en este punto es donde se intersecta la explicación de los procesos cognitivos del escolar con las posibilidades de intervención educativa del docente; en concreto, con el tipo de situaciones matemáticas que plantea al alumno para promover su aprendizaje.

Asimismo, se encontró que no todos los tipos de problemas entrañan la misma dificultad para los escolares, porque a pesar de que algunos logran resolver la mayoría de ellos, esto no indica que lograron comprender completamente las relaciones entre sus variables. En todo caso, los niños logran comprender claramente los problemas de cambio y de combinación, pero sus dificultades inician con los problemas de igualación, y sobre todo con los de comparación, ya que para resolver estos últimos, la mayoría de los niños en la primera evaluación emplearon una solución tipo I, y en todo caso en la segunda evaluación algunos se aproximaron a un mejor entendimiento mediante una solución tipo II o III. Específicamente en los problemas de comparación "más que" y "menos que", los niños mostraron dificultad para determinar el inverso recíproco entre el conjunto referente y el conjunto referido, lo que les llevaría a encontrar la solución con el algoritmo de la resta. Al desconocer el concepto y en algunos casos el algoritmo implicado,

asociaron la palabra "más", con una operación de suma, o "menos que" con una operación de resta.

Hubo niños que lograron respuesta tipo III, es decir que tenían conocimiento del algoritmo formal, pero a pesar de ello no lo empleaban y recurrían a sus estrategias o algoritmos naturales. Así, aunque saben cómo aplicar un algoritmo formal, por lo menos en términos de mecanización, aún no tienen una comprensión del mismo que les permita su empleo al resolver un problema.

De manera general, tanto niños de primero como de segundo grado emplean acertadamente diversas estrategias no formales, como la representación de gráficos, la del valor de las variables con objetos como semillas o en el mejor de los casos, prefieren el empleo de sus dedos (Hembree y Marsh, 1991; Martínez y Gorgorió, 2004). Estas estrategias particulares están basadas más en el conocimiento que tienen del número (Gelman y Gallistel, 1978), pues los niños de primer grado prefieren contar de uno en uno todos los elementos; y los de segundo cuentan a partir del número mayor para resolver problemas aditivos, aunque tienen sus limitaciones, pues al igualar una figura no emplean su conocimiento del número, sino que pretenden igualarla sólo por su forma (Piaget, 1967), o en el mejor de los casos utilizan la correspondencia uno a uno (en la segunda evaluación).

Cabe destacar que, de nuevo, sólo el alumno de segundo grado de alto rendimiento empleó la cardinalidad para igualar una figura, y fue capaz de dar una solución tipo IV al emplear correctamente los algoritmos de la suma y la resta en un problema de cambio, en uno de combinación y en otro de comparación "menos que", lo que mostró un entendimiento conceptual más amplio del número y de sus propiedades. De los estudios de caso, fue el único niño que mostró un nivel apropiado de conocimiento conceptual de la adición y la sustracción, así como de los algoritmos formales y del sistema decimal; sin embargo, sólo empleó estos conocimientos en la resolución de tres de seis problemas, en los demás aplicó las estrategias alternativas que se han venido mencionando.

Por otro lado, hubo casos en que conocer y aplicar el algoritmo de la resta en la resolución de los problemas no implicó que ya no se recurriera a los algoritmos propios, expresados mediante el recurso de los dibujos o gráficos. Es decir, en algunos casos se manejó a la par o alternativamente el algoritmo formal y el informal, incluso con la intención de corroborar los resultados. Esto indicaría que entre comprender los problemas y resolverlos formalmente, los algoritmos naturales juegan un papel de anclaje importante.

En términos generales, para resolver problemas y efectuar operaciones, los alumnos de primero y segundo grado emplean una solución tipo III, pues recurren a gráficos u objetos, y muestran dificultad para operar con esquemas a nivel mental. Es necesario apoyar a los niños con estas características en el uso de objetos externos, así como brindarles más oportunidades de reflexión durante las situaciones didácticas, que los ayuden a transitar de un razonamiento concreto a uno más abstracto y conceptual que los aproxime a una respuesta tipo IV y a emplear los algoritmos. De acuerdo con Fischbein (1999), el surgimiento de esos esquemas estructurales depende tanto del nivel de madurez intelectual como de la experiencia del individuo. En este caso, una experiencia mediada también por las características de la enseñanza impartida por el profesor. Coincidimos en que incluso una actividad sencilla como contar cinco manzanas no se puede aprender por simple repetición ni reproducirse mecánicamente: el niño que cuenta debe comprender el procedimiento y otorgarle un sentido para que el comportamiento constituya un acto matemático genuino (Sinclair, 2005), donde se logre un entendimiento conceptual y no sólo algorítmico.

Es cierto que los niños pueden resolver problemas utilizando sus propios recursos y estrategias, como el conteo y el uso de sus dedos u objetos (Carraher *et al*, 1991; Fuson, 1999), tal como lo demuestran los resultados grupales de ambas evaluaciones y los estudios de caso. Sin embargo, los resultados de la evaluación muestran la necesidad de tener conocimientos cada vez más eficientes y complejos, como son la multiplicación y la división, entre otros, que el niño construirá en la medida en que su propia naturaleza se lo permita, en conjunto con la instrucción escolar. Por ello es importante asegurar que el niño logre aprender y comprender los primeros conocimientos matemáticos como una base fundamental del conocimiento posterior.

En relación a las concepciones de los docentes, de sus representaciones y actuación pedagógica en el aula, que son aspectos íntimamente relacionados con los logros de los niños, ambos docentes, como se recordará, afirman que no basan su instrucción en alguna corriente o teoría en especial, sino que más bien usan su propia experiencia e historia personal, coincidiendo con lo encontrado por otros autores (Llinares y Sánchez, 1990; Gil, 1991; Monroy, 1997).

Como consecuencia de lo anterior, podrían ponerse en riesgo las mejores formas y alternativas para ayudar a los niños a aprender matemáticas, como serían el conocimiento de su nivel de madurez cognitiva, la adaptación de las actividades y secuencias didácticas, la información de cuál es el conocimiento previo que cada niño posee, el planteamiento de problemas contextualizados con diferentes niveles de complejidad que sean de interés, y ayuden al niño a construir y ampliar sus conceptos matemáticos.

En esta investigación, ambos maestros consideran que la principal problemática en la enseñanza de las matemáticas es el aprendizaje memorístico, la dificultad que los niños tienen para razonar en el momento de resolver problemas, el entrenamiento mecánico del algoritmo. No obstante, estas afirmaciones no encajan con lo que realizan en su aula, pues como se ha encontrado, las situaciones de enseñanza que plantean se centran sobre todo en contratos de reproducción formal y condicionamiento, donde no hay un trabajo de construcción de conocimientos matemáticos, sino más bien una apropiación precisamente mecánica y memorística de dichos conocimientos, aunque en el caso del profesor se encontraron más episodios donde promueve la reflexión en sus estudiantes e intenta la construcción de conceptos.

En cuanto a sus estrategias para enseñar a los niños con dificultades de comprensión, sólo en el caso del maestro se encontró una aproximación a la necesidad de realizar adaptaciones curriculares para los niños con algún tipo de dificultad, donde el uso de materiales y el apoyo individualizado han sido considerados como algunos de los principales recursos útiles para apoyar la enseñanza a dichos niños (Fuchs & Fuchs, 2003).

En lo que se refiere a la evaluación, ambos profesores dijeron basarse en una serie de exámenes bimestrales, considerando además la participación y la conducta del alumno. Al respecto, para que una evaluación sea coherente con los planteamientos constructivistas (Gil y Guzmán, 1993) se espera que a partir de la actuación del docente, ésta sea percibida por los alumnos como una ayuda real, generadora de expectativas positivas; que debe extenderse a todos los aspectos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) del aprendizaje, que se realice a lo largo de todo el proceso y no de valoraciones terminales, además de promover la autoevaluación y regulación del propio alumno.

En conclusión, se debe continuar la línea de investigación que explore las concepciones y su relación con la práctica de los docentes, junto con la búsqueda de formas alternativas de intervención y de prevención durante la formación docente, buscando coincidir entre lo que los maestros conciben sobre cómo debe ser la enseñanza y cómo lo hacen cuando enseñan. Por ejemplo, sus concepciones acerca de la evaluación pueden aprovecharse para que reflexionen sobre su práctica y consideren otras formas alternativas de evaluar, como la aplicación de rúbricas o el uso de portafolios, que les permitan revisar más el proceso de enseñanza y aprendizaje (Díaz-Barriga, 2005).

En cuanto al análisis del tipo de relación entre los alumnos y el profesor, mediado por un tipo de contrato didáctico, se observa la responsabilidad y obligación de enseñar los contenidos establecidos en los programas de la SEP (1993), ante estas condiciones se estableció un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997). Sin embargo, la forma particular en que cada maestro desarrolló sus clases determinó un tipo de contrato didáctico específico.

En primer grado se observó que la maestra basa su trabajo de enseñanza en la realización y repetición de ejercicios, revisando que todos los niños los escriban y resuelvan en su cuaderno; por su parte los niños deben poner atención, seguir las reglas del grupo, copiar y resolver los ejercicios como muestra de que han aprendido. Se observa así la ocurrencia de un contrato que va de la reproducción formal al condicionamiento (Ávila, 2001a, 2001b), aunque en ciertas ocasiones la maestra expone en el pizarrón cómo proceder para contar, sumar o restar, también pide que pasen los niños uno a uno para resolver ejercicios en el pizarrón, tratando de utilizar un contrato basado en la ostensión.

En cuanto al maestro de segundo grado, se observa la aplicación de un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997) específicamente centrado en la ostensión (Ávila, 2001a, 2001b), en donde destaca el interés del profesor por mostrar y explicar los conocimientos de la suma, la resta y el sistema decimal, mediante el empleo de diversas estrategias y recursos. Los conocimientos que adquieren los niños, bajo un contrato de ostensión, quedan en duda en el momento que los niños al intentar solucionar problemas aditivos con diferentes tipos de complejidad, prefieren abordarlos con sus propias estrategias; observamos que difícilmente emplean los conocimientos formales adquiridos, por lo que sería importante contribuir con los profesores hacia los contratos *constructivistas* y de los *saberes previos*, que fomenten el desarrollo conceptual.

Por otra parte, se observa en ambos maestros la ocurrencia del "efecto Topaze" (Brousseau, 1997, 2000; Ávila, 2001a, 2001b) que ocurre constantemente y en mayor medida con la maestra. De esta manera, el objetivo docente de enseñar un contenido se ve afectado por inducir pistas o en último de los casos dar las respuestas correctas a los alumnos, limitándoles la posibilidad de reflexionar sobre sus aprendizajes y dificultades y el por qué de lo correcto o erróneo de sus respuestas.

En conclusión, en el caso de la maestra de primer grado se observa una enseñanza de las matemáticas basada en una serie de ejercicios repetitivos, con la ausencia del planteamiento y solución de problemas matemáticos. En el maestro de segundo grado, se observa una enseñanza basada en la solución de ejercicios, donde constantemente se centra en la ejecución correcta de los algoritmos y la operatividad del sistema decimal pero sin contextualizar problemas auténticos (Díaz-Barriga, 2006).

Las formas del transcurrir de las clases de ambos profesores se asemeja a lo que Aebli (1958) cita como la didáctica tradicional, donde se destaca la importancia de la "intuición" y de los sentidos para hacer que los alumnos aprendan algún contenido matemático que el maestro debe exponer o mostrar, de ahí que se calificó de sensual-empirista a una psicología que halla el origen de todas las ideas en la experiencia sensible y que no atribuye al sujeto sino un papel insignificante en su adquisición, cuando debería ser el maestro el guía y el alumno el constructor de su propio conocimiento.

Cabe enfatizar que en ninguna de las clases se observó el aprendizaje colaborativo como tal. Se coincide con lo que reportan otros estudios, como el de Marshall (1995), puesto que el trabajo docente parece que consiste en ofrecer a los alumnos un procedimiento para resolver los problemas de manera rutinaria, que no permite la comprensión por parte del alumno, pues no se funda en el análisis del trabajo que se tiene que realizar. Asimismo, no se diferencian ni abordan los tipos de problemas que representan la mayor dificultad, como son los de igualación y comparación.

Por otra parte, se observa que existe predominantemente un tipo de contrato didáctico que cada maestro logra establecer de manera general con su grupo, no obstante, las condiciones parecen cambiar cuando este contrato didáctico se pone a prueba de manera individual con cada alumno. Este podría ser el caso de la posible diferencia que pudo llegar a establecerse entre alumnos de bajo y alto rendimiento. En este caso el compromiso parece ser mayor con los alumnos de alto rendimiento, quienes se muestran más responsables en su modo de atender y de responder a las clases expuestas. Por ejemplo, un niño de alto rendimiento puede hacer más preguntas y demandar mayor atención del maestro para poder resolver dudas de las tareas. Por su lado, el profesor se apoya en estos alumnos de alto rendimiento para plantear preguntas y corroborar resultados o procedimientos, así como darles mayor autonomía dentro del aula. En tanto, con los niños de bajo rendimiento el tipo de contrato podría cambiar, por ejemplo estos niños pueden no mostrar interés, esporádicamente o nunca plantear preguntas para resolver dudas y presentar tareas o procedimientos incompletos. Por lo tanto, en reciprocidad podría ser que el tipo de interacción entre maestro y alumno pueda llegar a ser diferente.

El análisis del tipo de contrato establecido entre el docente y los alumnos en lo individual no fue el objetivo central de este trabajo, sino el planteamiento del tipo de contrato en las sesiones grupales de enseñanza. Sin embargo, dado lo antes expuesto, para futuras investigaciones se recomienda que se considere cómo pueden llegar a ocurrir el contrato didáctico entre maestros y alumnos de alto y bajo rendimiento, lo que permitiría establecer patrones que promuevan un mayor aprendizaje en todos los alumnos. A fin de cuentas, esto es lo que permitiría atender la situación de diversidad de estilos y niveles de aprendizaje de los alumnos.

Para cerrar este segmento sobre los resultados que se derivan del estudio, así como del marco teórico planteado, surge una última reflexión junto con algunas interrogantes. Se plantea la pregunta sobre en qué proporción y desde cuándo se reproducen estas formas de enseñar matemáticas en todas las aulas del país y qué se ha hecho al respecto para mejorar las condiciones de la enseñanza. Si las consecuencias se muestran en los resultados y diagnósticos de las evaluaciones a gran escala internacionales y nacionales (PISA 2000, 2003, 2006, 2009; Excale y Enlace, 2006-2010), y además históricamente se han tratado de solucionar los bajos niveles de aprendizaje y de competencias con reformas curriculares (Ávila, 2006), así como grandes inversiones económicas y demás planes remediales y aún así, los cambios hasta hoy han sido mínimos, qué tan relevante sería que los maestros en activo y los que están en

formación conocieran este tipo de resultados, como los que se reportan en este libro, y al mismo tiempo reflexionaran sobre su formación y sus prácticas. En cuanto a la investigación nueva, cómo se pueden crear proyectos sobre las problemáticas actuales en matemáticas y el tipo de contenido que se encuentra en los reactivos de las diferentes pruebas aplicadas en las evaluaciones masivas. Cómo involucrar a los maestros, padres, autoridades escolares, gobierno y sociedad en general para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Qué de lo que hacen los países con baja inversión económica, pero con niveles de rendimiento de aprendizaje y competencias ejemplares, podría funcionar en nuestro país.

Por otra parte, en términos de aportación, el estudio del conocimiento matemático del niño a través del instrumento que se diseñó permitió realizar el análisis de dicho conocimiento, no sólo en términos cuantitativos utilizando como punto de referencia la propuesta curricular de la SEP (1993). La evaluación que se realizó permitió reconocer el proceso que sigue el niño y no sólo los productos o resultados que genera, ya que se detectaron los conocimientos y las dificultades que va construyendo el alumnado en términos de las categorías evaluadas. Por su parte, el estudio de las concepciones de los docentes permitió reconocer cuáles son sus concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además de contrastarlas con el tipo de práctica instruccional que siguen durante la impartición de sus clases. Esto condujo a entender el tipo de relación didáctica que se establece entre el alumno y el maestro, en términos del contrato didáctico que se establece en las clases, específicamente en relación con determinados conocimientos matemáticos.

En cuanto a los aspectos metodológicos, en este trabajo se aporta un modelo de análisis que no se observó que emplearan los más recientes autores e investigaciones revisadas: se estudia en conjunto el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, que considera el conocimiento del niño, las concepciones del maestro y sus prácticas instruccionales, así como la interacción entre los tres elementos. Esto permite partir del triángulo interactivo o didáctico (Coll y Sole, 2001) como unidad de análisis en la investigación y ofrecer una visión más completa y multi-determinada del objeto de estudio, y no sólo de explicaciones que se derivan de estudios individuales considerando por aislado al alumno, al maestro o al curriculum. Este modelo de investigación podría ser utilizado para realizar otras líneas de investigación que impliquen cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje escolar en cualquier nivel y materia, como podría ser explorar las dificultades en el aprendizaje no sólo de las matemáticas, sino en lectura y escritura, ciencias, historia, etcétera, considerando los diferentes niveles de educación básica.

Se considera que otra aportación importante de este trabajo fue el diseño del instrumento de evaluación de los conocimientos matemáticos de los niños dividido en cuatro categorías: conocimiento numérico, conocimiento del sistema de numeración decimal, solución de operaciones de suma y resta y resolución de problemas aditivos. El instrumento hizo posible la identificación de los aprendizajes esperados en el currículo oficial y su contraste en términos de logros reales de los alumnos, así como con las principales propuestas teóricas (Fuson, 1992; Nunes y Bryant, 1997; Carpenter *et al*, 1999), que fundamentaron esta investigación.

El empleo combinado de una metodología cuantitativa y cualitativa representa la ventaja de poder observar el comportamiento de los datos en términos más amplios cuando se estudia la perspectiva del grupo, y de manera más fina, a profundidad, mediante el empleo de los estudios de caso con unos cuantos alumnos. El conocimiento obtenido ofrece una aproximación a la comprensión del fenómeno y a la vez coadyuva a sugerir qué factores podrían modificarse o fortalecerse para obtener mejores logros educativos. De hecho, esta es una aportación importante desde la mirada de la psicología educativa, que es la disciplina que permite generar conocimiento sobre la manera en que los alumnos piensan, los procesos psicológicos que se ponen en juego cuando se aprenden matemáticas, las dificultades que plantean a dicho aprendizaje las tareas escolares y el repertorio de estrategias que utilizan los educandos al enfrentarlas.

Se corroboró que siguen teniendo vigencia los postulados de la teoría psicogenética que contribuyen a la explicación de los procesos de construcción del conocimiento matemático relativo a la noción del número. Pero al mismo tiempo, desde la perspectiva sociocultural, concluimos que las dificultades de los alumnos no se deben únicamente a situaciones "propias" de la complejidad del conocimiento matemático *per se* o a las limitaciones cognitivas de los sujetos, sino a una interacción entre diversos factores y procesos, sucediendo que las formas de enseñanza requieren un mayor ajuste a los procesos que siguen los alumnos para aprender.

Por último, a partir del análisis de la teoría, los resultados y conclusiones de esta investigación, es posible plantear una serie de sugerencias encaminadas a promover y fortalecer el desarrollo del conocimiento matemático del niño en estos grados. Se aclara que dichas sugerencias no pueden ser tomadas como una receta para la enseñanza de las matemáticas, sino como una serie de recomendaciones que se desprenden de estos resultados y de la revisión de la literatura especializada. Entre las sugerencias que se desprende de esta investigación destacan:

a) En la enseñanza del conocimiento matemático hay que considerar, como punto de partida, las nociones conceptuales y estratégicas que el niño ya ha construido relacionadas con la adición y la sustracción (conocimientos previos y algoritmos naturales).
b) En relación con el conocimiento numérico, es deseable plantear una diversidad de situaciones didácticas referidas al cambio, combinación, comparación e igualación, que ayuden al niño a desarrollar los principios básicos del conocimiento numérico, y no sólo a contar por el contar en sí o la práctica rutinaria del numeral. Esto permite afrontar la complejidad creciente de los tipos de problemas matemáticos que se le presentan al alumno en estos grados escolares.
c) Resulta apropiado promover el aprendizaje de los algoritmos de la suma y la resta sobre la base conceptual y estratégica que ya tienen los niños, dentro de un ambiente contextuado de resolución de problemas auténticos, sin olvidar la reflexión sobre los mismos y no sólo la mecanización de los procedimientos.
d) En la resolución de una diversidad amplia de problemas, se debe hacer participar al alumno en la construcción total de la situación problema y no sólo en su resolución, o en la simple aportación de datos. Es importante trabajar (tanto en la enseñanza como en la evaluación) las competencias referidas al conocimiento conceptual, al conocimiento estratégico y a la comunicación de resultados, tal como se ha expuesto en diversos apartados de la investigación.
e) De manera importante, es necesario vincular el planteamiento de problemas en situaciones relevantes de aplicación que requieran procesos de abstracción reflexiva, considerando un ambiente de trabajo grupal y cooperativo, no sólo individual.
f) Considerar por parte del maestro una evaluación continua, tanto de entrada como en el transcurso del proceso de aprendizaje,

que le permita conocer las nociones conceptuales, estratégicas y de procedimiento que emplean los alumnos, para ofrecer la realimentación y ajuste de las ayudas pedagógicas pertinentes.

g) Diversificar las estrategias de evaluación del aprendizaje de las matemáticas, la cual no sólo debe considerar el resultado de las operaciones, sino una valoración enfocada a determinar niveles progresivos de desempeño (i.e. mediante el empleo de una evaluación por rúbricas como la que aquí hemos utilizado).

h) Promover la autoevaluación en los alumnos y apoyarlos en el desarrollo de estrategias meta-cognitivas y de autorregulación del propio aprendizaje.

i) Es importante revisar la secuencia y organización de contenidos del currículo de matemáticas en los primeros grados de primaria, para plantear una estructura más acorde a la manera en que los niños se apropian este conocimiento y diseñar materiales y secuencias didácticas congruentes con la misma.

j) Por último, es importante abordar un proceso de formación de docentes para la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel inicial como cuando ya están en el servicio. En dicha formación es deseable un aprendizaje significativo de diversos enfoques de didáctica específica de las matemáticas, que puedan revaluar y aplicar en la práctica, así como conducir experiencias de reflexión crítica sobre sus concepciones y prácticas docentes, promover un trabajo colaborativo y colegiado, encaminado a la generación de propuestas didácticas innovadoras. Los docentes deben reunirse como colectivo para analizar el sentido de su labor docente y para plantear y afrontar las necesidades y problemas de la enseñanza, en este caso de las matemáticas. Otro aspecto importante es apoyarlos en la generación de materiales y secuencias didácticas pertinentes.

Entre las principales limitaciones de este estudio, se encontró que los resultados se circunscriben al contexto educativo que hemos estudiado, su generalidad es limitada, por lo que se requiere conducir más investigaciones en otros contextos educativos. La investigación sólo se realizó en primero y segundo grado y podría hacerse en otros y ampliar el análisis, para observar la evolución y apropiación de los contenidos matemáticos en ellos.

En cuanto a las limitaciones del instrumento para evaluar el conocimiento matemático, a pesar de que realmente mide lo que se pretende evaluar en los niños, resultó ser bastante extenso en su

aplicación, al grado de tener que aplicarse en dos sesiones. Se observó que contiene varios reactivos que estarían evaluando casi lo mismo en el área de solución de operaciones y del sistema decimal, por lo que sería importante seleccionar los reactivos más representativos y construir una versión más corta. La ventaja de realizar estos ajustes es que el instrumento sería más práctico de aplicar y de calificar, considerando el tiempo de atención y tolerancia de los niños.

De las entrevistas acerca de la concepciones de los maestros, su aplicación al inicio del ciclo escolar sólo permitió explorarlas en el momento, sin embargo se cree que podría ser interesante analizar si existen cambios en ellas a lo largo del ciclo escolar, dado que las concepciones son dinámicas y cambian en consonancia con el devenir de la enseñanza y el aprendizaje logrados. En caso de constatar cambios, al seguir la secuencia, podrían analizarse las principales causas o factores de esa transformación y determinar si en los propios docentes hay procesos importantes de cambio conceptual. Por lo tanto, se recomienda realizar no sólo una, sino varias entrevistas a lo largo del año o por lo menos una más, al final del mismo.

De la videograbación de las prácticas educativas para el análisis de los tipos de contratos didácticos que se desarrollan en las aulas, conviene considerar aspectos técnicos de importancia que limitaron esta investigación. En primer lugar, es indispensable considerar el apoyo técnico para lograr instalar cuando menos dos cámaras de videograbación fijas, una al fondo y otra al frente, y una tercera cámara que siga la secuencia total de los participantes en clase (maestro y alumnos). Además, es importante que cuando se esté grabando la participación y trabajo del niño, existan momentos en que se le cuestione acerca de sus procesos y la comprensión que está logrando en esos momentos o bien al finalizar la secuencia didáctica. Las videograbaciones en este caso se enfocaron a captar el devenir natural de las secuencias didácticas impartidas por los profesores en clase. Esto podría haberse complementado con entrevistas u otro tipo de protocolos dirigidos a los niños para tratar de recuperar desde la perspectiva de éstos, qué dificultades habían enfrentado, qué habían aprendido, qué tan interesados estaban, etcétera. En un principio se realizaron algunos interrogatorios informales con los niños al terminar las clases que se videograbaron, pero ya no se sistematizaron ni formaron parte del análisis de datos de este trabajo. Esta información contribuiría a enriquecer el análisis de los posibles avances o dificultades que el niño va enfrentando durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, en el momento mismo en que transcurre un tipo de contrato didáctico.

Finalmente, es necesario continuar realizando este tipo de estudios que revelen las incidencias del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y que ayudan a explicar el cómo y el qué aprende el niño, cuáles son sus dificultades, qué factores y de qué manera influyen en su aprendizaje, cuál es la forma de enseñar del profesor, qué ventajas o desventajas conlleva ésta para el aprendizaje del alumno, etcétera. Esto es lo que a mi juicio permitirá la construcción de modelos explicativos y de intervención más sólidos, que orienten la prevención de dificultades y la intervención didáctica encaminada a la mejora educativa en este campo del conocimiento.

Anexo 1

Tipos de contratos didácticos (Brousseau, 1997)

TIPO DE CONTRATO	SUBCATEGORÍAS DE CONTRATO
No didácticos: Sin responsabilidad didáctica, sin proyecto intencional de enseñar. "Conferencia magistral"	**Emisión:** Transmisión del mensaje sin condiciones efectivas de su recepción. Monologo sin considerar a los alumnos.
	Comunicación: Se compromete a hacer llegar el mensaje, asegurándose de su recepción, la interpretación es a cargo del alumno.
	Experto: Garantiza la validez del mensaje, considera la demanda del receptor mediante vías distintas de la simple demanda.
Ligeramente didácticos: Acepta el compromiso de organizar el mensaje, no acepta responsabilidad de sus efectos sobre el alumno. "Es demostrativo del empleo o utilidad del conocimiento, sin saber que el alumno aprende".	**Información:** Busca asentimiento del alumno, ofrece ciertas pruebas, puede ser dialéctico o dogmático.
	Utilización de conocimientos: Agrega una cláusula al anterior: la de mostrar el empleo y la utilidad de los conocimientos.
	Aplicación y control: En los anteriores el alumno decide si necesita más información, aquí el informador toma esa responsabilidad en parte, dando un criterio al informado para determinar si ha comprendido bien el saber
Fuertemente didácticos: El maestro toma la responsabilidad del resultado efectivo, intenta provocar un aprendizaje, trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno:	**Reproducción formal**: El maestro se compromete a que el alumno realice una tarea culturalmente aceptada como adquisición de un saber, los medios no importan, si la actividad en sí misma que se supone fuente y prueba de aprendizaje. Los medios de reproducción por imitación no exigen razones o explicaciones. El alumno realiza la tarea con la condición de que sea reductible al repertorio que posee.

Fuertemente didácticos: El maestro toma la responsabilidad del resultado efectivo, intenta provocar un aprendizaje, trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno:	**Condicionamiento:** La producción de una tarea no garantiza que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, como son la asociación y la repetición, el profesor cree que con esto el alumno se familiarizará con el objeto de aprendizaje.
	Mayéutica socrática. El profesor escoge respuestas de las cuales el alumno pueda encontrar respuestas con sus propios recursos. **Trabajo empiristas:** El conocimiento se establece esencialmente por el contacto con el medio al cual el alumno debe adaptarse, la responsabilidad de aprender es de él. La lectura del medio es casi directa, el alumno percibe "viendo" la estructura.
	Ostensión: Con base a la lectura del medio inmediato, el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre por frecuentación repetida. El profesor "muestra" un objeto, o una propiedad, y el "alumno" acepta verlo como el representante de una clase de la cual deberá reconocer los elementos en otras circunstancias.
	Constructivistas: El profesor organiza el medio, se deriva del saber previsto y de los procesos de adquisición del alumno, de su saber previo, el alumno es responsable de adquirir el saber, es racional y coherente. El alumno debe ser autónomo en la construcción de su conocimiento.
	Transformación de saberes previos: Los aprendizajes se dan por acomodación, la génesis didáctica de los saberes procede por modificaciones y por rupturas a la manera de una génesis histórica y no de manera lineal por simple acumulación. Sirve de fondo a la teoría de las situaciones didácticas se busca que sea el sujeto epistémico el que prive por sobre el sujeto didáctico.

Anexo 2.

Illinois Rubric for Mathematics (Illinois State Board of Education)

Escala 1. Conocimiento matemático

4. Presenta un entendimiento completo de los principios y conceptos de los problemas matemáticos. Utiliza apropiadamente una notación y terminología matemática. Ejecuta algoritmos completa y correctamente.

3. Presenta casi un entendimiento completo de los principios y conceptos matemáticos. Utiliza casi una notación y terminología matemática. Ejecuta algoritmos completamente. Sus cálculos de cómputo son generalmente correctos, pero pueden contener errores mínimos.
2. Presenta entendimiento de algunos de los principios y conceptos matemáticos. Puede contener serios errores de cómputo.
1. Presenta muy limitado entendimiento de los principios y conceptos matemáticos. Puede hacer uso indebido o fallar al utilizar términos matemáticos. Puede contener errores de cómputo mayores.
0. Presenta un no entendimiento de los principios y conceptos matemáticos.

Escala II. Conocimiento estratégico

4. Identifica todos los elementos importantes del problema y presenta un entendimiento de las relaciones entre ellos. Refleja una estrategia sistemática y apropiada para solucionar los problemas. Da clara evidencia de un proceso de solución, y este proceso de solución es completo y sistemático.
3. Puede utilizar información relevante y externa de naturaleza formal o informal. Identifica la mayoría de los elementos importantes del problema y presenta un entendimiento general de las relaciones entre ellos. El proceso de solución es casi completo.
2. Identifica algunos elementos importantes del problema pero presenta únicamente limitado entendimiento de la relaciones entre ellos. Da alguna evidencia del proceso de solución.
1. Puede intentar utilizar información relevante externa. Falla para identificar importantes elementos o partes así como para enfati-

zar sobre elementos sin importancia. Puede reflejar una estrategia importante para solucionar el problema. Da mínima evidencia de un proceso de solución. El proceso puede ser difícil para identificar.

0. Intenta utilizar información externa y relevante. Falla para indicar elementos del problema. Copia partes del problema, pero sin intentar una solución.

Escala III. Comunicación

4. Da una completa explicación escrita del proceso de solución empleado. Incluye un diagrama apropiado y completo con explicación de los elementos. Puede proveer ejemplos y ejemplos contrarios si es apropiado.
3. Da bastante explicación del proceso de solución empleado. Puede tener algunos huecos menores. Puede incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones.
2. Da alguna explicación del proceso de solución empleado, pero la comunicación es vaga o difícil de interpretar. Puede incluir un diagrama que es imperfecto, sin claridad, o no explicado.
1. Provee una explicación mínima del proceso de solución. Puede fallar para completar o puede omitir partes significantes del problema. Explicación errónea o difícil de presentar. Puede incluir un diagrama el cual representa incorrectamente la situación problema o el diagrama puede ser no claro y difícil para interpretar.
0. Las palabras no reflejan el problema o no da una explicación escrita. Puede incluir grafos o dibujos con los que completamente malinterpreta el problema.

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Aguilar, V. y Navarro, G. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53 (1), (pp. 63-83).

Andere, M. E. (2003). *La educación en México: un fracaso monumental.* México: Editorial Planeta Mexicana, S.A. de C. V.

______ (2008). PISA, ¿Qué sucede con México? *Política educativa.* Enero del 2008, (pp. 15-22).

Ávila, S. A. (2001a). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar.* Trabajo de grado, Doctorado en Pedagogía. Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, México.

Ávila, S. A. (2001b). El maestro y el contrato didáctico en la teoría brousseauniana. *Educación matemática,* 13 (3) (pp. 5-21), diciembre.

Ávila, S. A. (2004). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas. En A. S. Ávila (Dir.), L. M. Aguayo, D. Eudave, J. L. Estrada, A. Hermosillo, J. Mendoza, M. E Saucedo, *La Reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas.* México: SEP

Ávila, S. A. y **Carvajal, A.** (2003). El campo de la educación matemática (1993-2001). En A. López y Mota (Coord), Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje (pp. 35-149). México: Grupo Ideograma Editores.

Ávila, S. A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.

Bermejo, V., Lago, M., Rodríguez, P. y Pérez , M. (2000). Fracaso escolar en matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53 (1), (pp. 43-62).

Block, D., Álvarez, M. (1999). Los números en primer grado: Cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática,* 11 (1), (pp. 57-76), abril.

Block, D., Dávila, M., Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática,* 7 (3), (pp. 5-26).

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática,* 12 (1), (pp. 5-38).

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., Empson, S. (1999). *Children's Mathematics*. Madison: Heinemann.

Carpenter, T., Fennema E., Peterson, P., Chiang, C-P., Loef, M. (1986). Using Knowledge of Children's Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study. *American Educational Research,* 26, (4), (pp. 476- 499).

Carraher, T., Carraher D., Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo Veintiuno Editores, S. A. de C. V.

Castañeda, F. S. (1996). *Documento interno de trabajo del Laboratorio de Fomento de Desarrollo Cognitivo y del Aprendizaje.* Posgrado, Facultad de Psicología. México: UNAM.

Castañeda, F. S. (2004). Educación, aprendizaje y cognición. En *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica.* México: Manual Moderno.

Clark, C. M., Peterson, P. L. (1990). Procesos de pensamiento de los docentes. En M. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza III. Profesores y alumnos*. Barcelona: Paidós.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J., Rochera, M. J. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa. *Infancia y aprendizaje*, (pp. 59-60, 189-232).

Coll, C., Pozo, J.I., Sarabia, B., Valls, E. (1992). *Los contenidos de la reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes*. Madrid: Santillana.

Coll, C., Sole, I. (2001). Enseñar y aprender en el contexto en el aula. En C. Coll, J. Palacios, y Á. Marchesi. *Desarrollo psicológico y educación* (pp. 357-386). Madrid: Alianza. Cap. 14.

Colomina, R., Onrubia, J., Rochera, M. J. (2001). Interacción educativa y aprendizaje escolar: la interacción entre alumnos. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi. (Comps.). *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 415-435). Madrid: Alianza.

Cortina, M. J. L. (1997). *Conceptualización y operación del valor posicional en diferentes situaciones. Un estudio con niñas y niños mexicanos de segundo, tercer y cuarto grados.* Trabajo de grado. Maestría en pedagogía. México: Universidad de las Américas.

Cortina, M. J. L. (2006). *Las mediciones de la calidad del aprendizaje matemático en México: ¿qué nos devela la prueba PISA 2003 y cómo podemos responder?,* 18 (1), (pp. 161-176).

Chicago Public Schools Bureau of Student Assessment. *Illinois Rubric for Mathematics*. Recuperado de: http://intranet, cps.k12.il.us/Assessments/Ideas_and_Rubrics/ Rubric_Bank/MathRubrics.Pdf.

Díaz Barriga, A. F. (2005). *Enseñanza situada: Vinculo entre la escuela y la vida*. México: McGraw Hill.

English, L. (1998). Children's problem posing within formal and informal. *Journal for Research in Mathematics Education,* (29), (pp. 24-83).

Erickson, D. K. (1993, april). *Middle school mathematics teachers´ views of mathematics and mathematics education, their planning and classroom instruction, and student beliefs and achievement.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA.

Eurydice European Unit (2002). *Key Competencies.* Belgium, Brussels: Eurydice.

Farfán, M. A. (1998). Enseñanza de estrategias de autorregulación en solución de problemas aritméticos a niños con dificultades de aprendizaje. Trabajo de grado. Licenciatura en Psicología. Facultad de Psicología. México: UNAM.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, L., Levi, J., Empson, S., (1996). Learning to use children's thinking in mathematics instruction: A longitudinal study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), (pp. 403-434).

Fischbein, E. (1999). Psychology and Mathematics Education. *Mathematical Thinking & Learning, an international Journal*, m 1 (1), (pp. 12-47).

Flores, M. R. C. (1999). La enseñanza de estrategias de autorregulación a niños con problemas de aprendizaje mediante la capacitación a madres. *Integración, Educación y Desarrollo Psicológico*, (11), (pp. 1-17).

Flores, M. R. C. (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción. Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación.* Tesis de doctorado, Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática,* 17(7), (pp. 7-34).

Fuchs & Fuchs (2003). Enhancing the mathematical problem solving of students with mathematics disabilities. En H. L. Swanson, K. R. Harris, S. Graham (Ed.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 306-322). New York, EE. UU. : The Guilford Press.

Fuenlabrada, I. (1996). Innovaciones de la matemática en la escuela primaria. *Cero en conducta*. Año 11, (pp. 42-43, 72-79).

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer Verlag.

Fuson, K. C. (1992) Research on whole number addition and subtraction. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). New York: McMillan Publishing Company.

García, R. O. (2002). *Estrategias para favorecer el aprendizaje de solución de problemas matemáticos de suma y resta.* Documento de grado. Maestría en Psicología Escolar, Facultad de Psicología, UNAM, México.

García, R. O., Jiménez, H. E., Flores, M. R. C. (2006). Un programa de apoyo para facilitar el aprendizaje de solución de problemas de suma y resta en alumnos de bajo rendimiento. *Educación Matemática.* 18 (2).

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, Massachussets: Harvard University Press.

Gil, P. D. (1991). ¿Qué hemos de saber y hacer los profesores de ciencias? En: D. Gil, J. Carrascosa, C. Furió y J. Martínez-Torregrosa (Eds.), *La enseñanza de* *las ciencias en la educación secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori, (pp. 19-32).

Gil, P. D., Guzmán, O. M. (1993). *La necesidad de innovaciones en la evaluación. Enseñanza de las ciencias y la matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.* España: Editorial Popular.

Gill, M. G., Ashton, P. T., Algina, J. (2004). Changing pre-service teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. *Contemporary Educational Psychology,* 29, (pp. 64-185).

Ginsburg, H. P., Opper, S. (1977). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual.* Madrid: Prentice Hall Internacional.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind. The clinical interview in psychological research and practice.* New York: Cambridge University Press.

Glaser, B. G., Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory.* Chicago: Aldine de Gruyter.

Good, T., Brophy, J. (1997). *Psicología educativa.* México: McGraw-Hill.

Guerrero, A. (1997). *El proceso de enseñanza aprendizaje de las operaciones aritméticas elementales*. Tesis Doctoral, Facultad de Filosofía, UNAM, México.

Hallahan, D., Kauffman, J., Lloyd, J. (1999). *Introduction to learning disabilities.* Massachussets: Allyn and Bacon.

Hembree, R., Marsh, H. (1991). Problem solving in early childhood: Building foundations. En R. J. Jensen, (Ed.), *Research ideas for the classroom. Early childhood mathematics* (pp. 151-170). New York.: McMillan Publishing Company.

Hernández, S., Fernández, C., Baptista, L. (2009). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Hofer, B. K. (2002). Personal epistemology as a psychological and educational construct: an introduction. En B. K. Hofer. *Personal epistemology: the psychology of beliefs about knowledge and knowing.* New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hofer, B. K., Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), (pp. 88-140).

Imbernón, F. (1994). La formación del profesorado. *Colección Papeles de Psicología*. Barcelona: Paidós. 11.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2004). *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México*. México: INEE.

______(2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica: sexto de primaria y tercero de secundaria*. México: INEE.

______ (2007). *PISA 2006 en México* (1a. ed.). México: INEE.

______ (2008). *Estudio comparativo del aprendizaje en sexto de primaria 2005-2007* (1a. ed.). México: INEE.

______ (2009). *Panorama Educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación básica* (1a. ed.). México: INEE.

Jordan, N., Montani, T. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*. 30 (6), (p. 624).

Kamii, C. (1988). *El niño reinventa la aritmética: Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Kane, R., Sandretto, S., Heath C. (2002). Telling half the story: A critical review of research on the teaching beliefs and practices of university academics. *Review of educational research*, 72 (2), (pp. 177-228).

King, P. M. (2002). The reflective judgment model: Twenty years of research on epistemic cognition. En B. K. Hofer. *Personal epistemology: the psychology of beliefs about knowledge and knowing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Labinowicz, E. (1987). *Introducción a Piaget*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.

Lagrange, J-B., Artigue, M., Laborde, C., Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation (pp. 237-269). En *Second International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lave, J., Murtaugh, M., de la Rocha, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. En B. Rogoff, J. Lave (Eds.), *Everyday cognition*. USA: Harvard University Press.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona: Paidós.

Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores*. Barcelona: Paidós.

Llinares, C. S., Sánchez, G. V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En S. Llinares, V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. (pp. 63-116). Sevilla: Alfar.

Macotela, F. G .S., Bermúdez, P., Castañeda, I. (2000). *Inventario de Ejecución Académica. Facultad de Psicología*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Marshall, S. (1995). *Schemes in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

Martínez, F. J. R. (2004). *Concepción de aprendizaje, metacognición y cambio conceptual en estudiantes universitarios de psicología.* Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, España.

Martínez, S. M., Gorgorió, N. S. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 6(1). Recuperado de http://redie.uabc.mx/ vol6no1/contenido-silva.html.

Martínez, R. F. (2007). *México. Informe PISA 2006*. OEI. Recuperado el 14 de octubre, de http://www.oei.es/noticias/spip.php?article1491

McLeod, D. B., McLeod, S. H. (2002). *Synthesis-beliefs and mathematics education: implication for learning, teaching and research.* USA: Kluwer Academic Publishers.

Mendoza, M. J. (2004). La reforma curricular y los problemas en la clase de matemáticas. En A. Ávila (Dir.), L. M. Aguayo, D. Eudave, J. L. Estrada, A. Hermosillo, J. Mendoza, M. E. Saucedo, E., *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas*. México: SEP.

Mercer, N. (1996). Las perspectivas socioculturales y el estudio del discurso en el aula. En C. Coll, D. Edwards. *Enseñanza y aprendizaje: aproximaciones al estado del discurso educacional* (pp. 11-21). Madrid: Aprendizaje.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study. Applications in Education.* San Francisco, California: Jossey-Bass.

Monroy, M. (1998). *Un estudio con profesores de Ciencias Histórico Sociales del Colegio de Bachilleres y del Colegio de Ciencias y Humanidades.* Tesis de Maestría, Facultad de Psicología: UNAM, México.

Monroy, M., Díaz, M. (2004). Las teorías y las creencias docentes, una alternativa para la evaluación. En F. Díaz-Barriga y M., Rueda., *La evaluación de la docencia en la Universidad* (pp. 137-151). México: IISUE.

Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. *Review of educational research*. 74 (3), (pp. 317-377).

Nunes, T., Schliemann, A. L., Carraher (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Nueva York, Cambridge University Press.

Nunes, T., Bryant, P. (1997). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México: Siglo XXI.

OCDE (2001). *Resultados del estudio PISA*. Disponible en: http//www.rtn.net.mx/OCDE/prensa.html#pisa1.

______ (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana.* España: Santillana Educación S. L.

______(2010). Education at a Glance 2010. OECD Indicators. Recuperado de www.oecd.org/dataoecd.

______ (2010). *OECD in Figures 2009. Education. Performance, 2007*. Recuperado de http://www.oecd.org/document/47/0,3343, en_2649_34489_43896303_1_1_1_1,00.html.

Olabuénaga, R. (1999). *Metodología de investigación cualitativa. La oportunidad de investigar cualitativamente*. España: Universidad de Deusto.

Onrubia, J., Rochera, Ma. J., Barberá, E. (2001). La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios, A. Marchesi (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación.* (pp. 487-508). Madrid: Alianza.

Organización de Estados Iberoamericanos. (2010). *2021 Metas Educativas.* Madrid, España: OEI, CEPAL, Secretaría General Iberoamericana.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y aprendizaje.* 26 (4), (pp. 451-468).

Pardo, A., Ruiz, M. A. (2002). *SPSS 11 Guía para el análisis de datos*. Madrid: McGraw-Hill/ Interamericana.

Pavkov, T., W., Pierce, K. A. (2003). *Ready, Set, Go!. A student guide to SPSS 11 on Windows*. New York: McGraw Hill.

Pepin, B. (1999). *Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: the theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany:* TNTEE publications. 2 (1). Recuperado de http://tntee.umu.se/lisboa/papers/full-papers/pdf/e4-pepin.pdf.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Colección Biblioteca del aula, 196. Barcelona: Graó.

Perry, W. G. (1981). Cognitive and ethical growth: The making of meaning. En A. Chickering (Ed.) *The modern American college* (pp. 76-116). New York: Josey-Bass.

Piaget, J. (1967). *La génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

Posner, G., Strike, K., Hewson, P., Gerzog, W. (1982). Accommodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education,* 66 (2), (pp. 211-227).

Pozo, J. L. (1996). *La solución de problemas.* Madrid: Santillana.

Pozo, J. L. (2000). Concepciones de aprendizaje y cambio educativo. Ensayo y experiencias. *Psicología en el campo de la educación.* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas. 33, (pp. 4-13).

Rodríguez, G., Gil, J., García, E., (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada: Ediciones Aljibe.

Scheuer, N. (2005). Introducción al Dossier: De las matemáticas como conocimiento lógico a las matemáticas como conocimiento sociocultural: implicaciones para el estudio de la adquisición y enseñanza del número. *Infancia y Aprendizaje.* 28(4), (pp. 363-375).

Schommer, M. (1990). Effects and beliefs about the nature of knowledge and comprehension. *Journal of Educational Psychology,* 82, (pp. 498-504).

Schön, D. (1994). La práctica reflexiva: aceptar y aprender de la discrepancia. *Cuadernos de Pedagogía*, 222, (pp. 183-189).

Sinclair, A. (2005). Las matemáticas y la imitación entre el año y los tres años de edad. *Infancia y Aprendizaje.* 28(4), (pp. 377-392).

Stake, R. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin, Lincoln, Y. S. (Eds). *Handbook of Qualitative Research*. California, USA: SAGE Publications.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata

SEP. (2010). *Enlace. Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares. Educación Básica.* Recuperado de http://enlace.sep.gob.mx/ba/docs/boletín_enlaceba2010.pdf.

______ (1999a). *Plan y programas de estudio. Educación básica*. México: SEP (pp. 9-68).

______ (1993b) Plan y programas de estudio. Educación básica. México: SEP

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. San Diego University.

Tobin, K., Espinet, M. (1989). Impediments to change: applications of coaching in high school science teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 26 (2), (pp. 105-120).

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts Learning. En T. Nunes, P. Bryant. *Learning and Teaching Mathematics: International Perspective.* Success Oku: Psychology Press.

Vermunt, J., Verloop, N. (1999) Congruence and friction between learning and teaching. *Learning and instruction,* (9), (pp. 257-280).

Vigotsky, L. S. (1997). *Obras escogidas (* Tomo I). Moscú: Editorial Pedagógica.

Wadsworth, B. (1991). *Teoría de Piaget del desarrollo cognoscitivo y afectivo*. México: Diana.

Waldegg, G. (1995). *La investigación educativa en los ochenta y perspectivas para los noventa. Procesos de enseñanza y aprendizaje II.* México: Fundación para la Cultura del Maestro Mexicano. (2), (pp. 11- 63).

Yin, R. K. (1994). *Case study research. Design and methods.* (2nd ed.) Thousand Oaks, Calif.: Sage.