Revista Colombiana de Física, Vol. 43, No. 1 de 2011.

Efectos De Una Interacción No Conmutativa En La Radiación De Hawking

Effects Of A Noncommutative Interaction On Hawking Radiation

C. A. Soto Campos * [a]

[a] Universidad Autónoma del estado de Hidalgo, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5., Mineral de la Reforma, Hidalgo, MÃ©xico.

Recibido 23.07.10; Aceptado 29.11.10; Publicado en línea 24.04.11.

Resumen

Discuto algunas posibles implicaciones de un modelo bidimensional para la evaporación de un agujero negro en una teoría de campo no conmutativa. La no conmutatividad que considero no afecta la gravedad pero juega un papel muy importante en la dinámica de un campo escalar no masivo en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild. Encuentro que la no conmutatividad afecta al flujo de partículas salientes y la naturaleza de las divergencias UV/IR. Finalmente se encuentra que la interacción no conmutativa destruye la naturaleza térmica del flujo.

Palabras Clave: Agujero negro; No conmutatividad.

Abstract

I discuss some possible implications of a two-dimensional model for black hole evaporation in a noncommutative field theory. The noncommutativity I consider does not affect gravity, but plays an important role in the dynamics of a massless scalar field in the event horizon of a Schwarzschild black hole. I find that noncommutativity will affect the flux of outgoing particles and the nature of its UV/IR divergences. The noncommutative interaction still destroys the thermal nature of fluxes.

Keywords: Black hole; Noncommutativity.
PACS: 04.70.Dy.

1. Introducción

Desde el importante descubrimiento de Hawking en 1974 [1], de que un agujero negro puede emitir radiación (para ver una referencia previa se puede consultar la referencia [2]) se ha incrementado considerablemente la cantidad de publicaciones en teoría cuántica de campos en espacios curvos. Algunos de los trabajos más relevantes sobre dichos tópicos son por ejemplo [3, 4, 5, 6, 7, 8]. En el artículo antes citado, Hawking consideró un campo escalar Hermítico no auto interactuante acoplado a un campo gravitacional de fondo clásico dado por el espacio-tiempo de Schwarzschild. El modelo más simple para un campo de materia está representado por un campo escalar neutro de espín cero con masa m y es descrito por la ecuacion de Klein-Gordon, propágandose en un espacio tiempo de Schwarzschild.

En ausencia de campos interactuantes, el agujero negro de Schwarzschild de masa M emitirá partículas con una temperatura $T_H = 1/8\pi M$ [1]. El estado final será el de un flujo saliente a la temperatura T_H. El agujero negro en equilibrio con un baño térmico a temperatura T_H ha sido investigado en [9]. Ahí se encontró que el flujo de radiación saliente permanece térmico debido a argumentos de balance detallado.

La pregunta de si la naturaleza térmica de la radiación

*sotoc@uaeh.edu.mx

permanece inalterada cuando se toman en cuenta las autointeracciones de los campos de materia alrededor del agujero negro ha sido discutida inicialmente en [10, 11] (para ver resultados previos puede consultarse [12]). En estos trabajos se estudia un modelo de prueba basado en un campo escalar Φ con un término de autointeracción de la forma $\lambda\Phi^4$, siendo λ la constante de acoplamiento. El campo está definido en el espacio tiempo bidimensional definido por las coordenadas (r, t) de un agujero negro de Schwarzschild, de manera que la métrica del espacio tiempo no es en sÃ mismo una teoría de Einstein de dos dimensiones. En [10, 11] se encontró que dicho modelo interactuante en el agujero negro es equivalente a un modelo del mismo campo escalar definido en el espacio tiempo plano pero con un parámetro λ dependiente del tiempo. Los flujos que constituyen los campos entrantes y salientes al agujero negro de dos dimensiones pueden interactuar entre sí como dos baños térmicos con diferentes temperaturas. Para un campo escalar sin masa en un espacio tiempo plano, los flujos entrante y saliente permanecen en equilibrio consigo mismos.

Por otra parte, en los últimos años se ha notado un creciente interés en los efectos de la geometría noconmutativa en diferentes modelos cosmológicos. Esto es porque la cosmología podría proporcionar una posible manera de probar teorías más allá del modelo estándar de la física de partículas. Un ejemplo de esto puede verse en [15]. Ahí se señala la posibilidad de que una geometría noconmutativa podría inducir fluctuaciones en el proceso de inflación, modificando las relaciones de dispersión a distancias cortas. En este trabajo la gravedad no es afectada por la noconmutatividad, manteniéndose como un "expectador".

Asimismo, ha habido novedosos intentos de explorar las consecuencias de la noconmutatividad en un espacio tiempo de Schwarzschild. La idea de la noconmutatividad en las coordenadas del espaciotiempo ha estado en la literatura desde hace años [14].

Motivado por esta línea de razonamiento, en el presente trabajo estudiaré el efecto de la noconmutatividad en el flujo de radiación en un agujero negro de Schwarzschild de dos dimensiones que se obtiene al considerar una interacción del tipo $\lambda\Phi^4_\star$ en los campos escalares de materia.

En el presente artículo retomaré el enfoque de Leahy y Unruh [10, 11] . Esto ha sido también discutido con cierto detalle en [16].

En la siguiente sección haré una breve revisión de los efectos de la interacción $\lambda\Phi^4_\star$ sobre los flujos entrantes y salientes en un modelo de agujero negro de dos dimensiones y en las secciones posteriores procederé a explicar cómo deformar dicho modelo.

2. Radiación en un Agujero Negro Bidimensional con Interacción $\boldsymbol{\lambda\Phi^4}$

A continuación revisaremos algunos aspectos relevantes de la influencia de un término de autointeracción de un campo de materia Φ sobre la radiación de Hawking en un modelo de dos dimensiones. Para ser más precisos adoptaremos las convenciones de Leahy y Unruh [10]. No es el propósito el de dar una detallada explicación del tema sino resaltar algunos aspectos relevantes. En lo que sigue adoptaremos unidades naturales tales que $G = \hbar = c = k = 1$.

Como se ha mencionado antes, el campo escalar sin masa Φ satisface la ecuación de onda

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right) = 0, \tag{1}$$

Por otra parte, la métrica de un agujero negro bidimensional está dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 \\ &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)dudv, \end{aligned} \tag{2}$$

donde u y v se definen como $u = t - r^*$, $v = t + r^*$ y r^* es la coordenada "tortuga" definida por:

$$r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \ . \tag{3}$$

Ahora consideremos la solución de la ec.(1). Podemos, expresar estos campos de la forma

$$\Phi(u, v) = \Phi_{\mathbf{O}}(u) + \Phi_{\mathbf{I}}(v) \ , \tag{4}$$

donde $\Phi_{\mathbf{O}}$ y $\Phi_{\mathbf{I}}$ son campos que dependen de las coordenadas u y v respectivamente. Los subíndices indican que se trata de campos salientes (**O**) o entrantes (**I**) como se verá enseguida. Con el objeto de cuantizar el campo, se expanden estas soluciones en modos normales así como usando operadores de creación y destrucción "apropiados" para estos modos. La expansión más simple viene dada en términos de las ondas planas

$$\chi_\omega = N\frac{e^{-i\omega v}}{(2|\omega|)^{1/2}} \tag{5}$$

para los modos entrantes, y

$$\psi_\omega = N\frac{e^{-i\omega u}}{(2|\omega|)^{1/2}} \tag{6}$$

para los modos salientes. De manera que las componentes en la ec.(4) pueden expandirse

$$\Phi_{\mathbf{I}} = \sum_{\omega>0}(b_\omega \chi_\omega + b_\omega^\dagger \chi_\omega^*) \ , \tag{7}$$

$$\Phi_{\mathbf{O}} = \sum_{\omega>0}(C_\omega \psi_\omega + C_\omega^\dagger \psi_\omega^*) \ . \tag{8}$$

En lo que resta del artículo adoptamos esta convención para los campos que representan partículas entrantes y salientes, respectivamente. En las ecuaciones (5) y (6) hemos introducido el parámetro N el cual es un factor de normalización que no depende de la frecuencia.

Definiremos el estado de vacío de los estados de campos entrantes como aquel estado $|s\rangle$ para el cual

$$b_\omega|s\rangle = 0 \ , (\omega > 0) \ . \tag{9}$$

Los estados correspondientes $|s'\rangle$ definidos con el operador C_ω representan el vacío para estados de partículas salientes, i.e.,

$$C_\omega|s'\rangle = 0, \qquad (\omega > 0). \tag{10}$$

Como es usual, $|s\rangle$ y $|s'\rangle$ están relacionadas a través de una transformación de *Bogoliubov*. En esos términos, el flujo térmico de partículas salientes del agujero negro con frecuencia ω corresponde al valor de expectación del operador de número $C_\omega^\dagger C_\omega$, i.e.

$$\frac{dF}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{tr}\big(\rho C_\omega^\dagger C_\omega\big) \ , \tag{11}$$

donde ρ es la matriz de densidad. Ésta se construye de la siguiente forma:

$$\rho = \rho_O \otimes \rho_I \ ,$$

donde

$$\rho_O = |0\rangle\langle 0| \ , \tag{12}$$

$$\rho_I = \bigotimes_\omega \sum_{n_\omega} e^{-n_\omega \omega \beta'}|n_\omega\rangle_I \langle n_\omega|_I \ , \tag{13}$$

y $|n_\omega\rangle_I$ es el estado de n "cuantos" en el modo entrante con energía ω a temperatura β'.

Ahora examinaremos qué es lo que sucede cuando introducimos un término de *autointeracción* para el campo escalar Φ. En particular estamos interesados en el valor esperado del flujo de partículas salientes. Utilizando el cuadro de interacción, la matriz de densidad evoluciona [16] a través de una matriz S de manera que

$$\rho(t) = S(t)\rho(0)S^\dagger(t) \ , \tag{14}$$

donde $\rho(0)$ la matriz de densidad inicial y S es una matriz de evolución que definiremos en la siguiente sección.

A continuación introducimos una autointeracción noconmutativa para los campos en nuestro modelo de agujero negro bidimensional. La interacción será del tipo $\lambda\Phi_\star^4 \equiv \lambda\Phi\star\Phi\star\Phi\star\Phi$. El significado de la operación $\star$ será asimismo explicado en esta sección. Las coordenadas u y v dependen de las coordenadas canónicas noconmutativas (r,t) de la forma usual $u = t - r^*$ y $v = t + r^*$ donde la coordenada r^* se definió previamente. Por lo tanto los campos Φ dependen de las coordenadas noconmutativas $x^\mu = (r,t)$, i.e. $[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}$. Entonces promovemos todos los productos de las funciones de los modos normales en productos estrella. Es natural entonces definir el producto de Moyal

$$\big(\Phi_1\star\Phi_2\big)(x) \equiv \Big[e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_{\xi_\mu}\partial_{\eta_\nu}}\Phi_1(x+\xi)\Phi_2(x+\eta)\Big]_{\xi=\eta=0} , \tag{15}$$

donde $\Theta^{\mu\nu} = \Theta\varepsilon^{\mu\nu}$ es la matriz determinada por el parámetro noconmutativo Θ.

Ahora introducimos la interacción noconmutativa, modificando las ecuaciones para $S(t)$ dadas en [10] como sigue

$$S^\star(t) = \mathrm{T}\exp\Big[-i\int^t H_I^\star(t')dt'\Big], \tag{16}$$

donde el Hamiltoniano noconmutativo $H_I^*(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} H_I^\star(t) &= \int \frac{\lambda}{4}\Phi_1\star\Phi_2\star\Phi_3\star\Phi_4 \ dr \\ &= \frac{\lambda}{4}\int dr\Big(\Phi(x_1)\star\Phi(x_2)\Big)\Big(\Phi(x_3)\star\Phi(x_4)\Big) \end{aligned} \tag{17}$$

Paralelamente vemos de la Eq. (16) que la modificación no conmutativa del hamiltoniano de interacción se propaga a la evolución de la matriz de densidad y por lo tanto al flujo de partículas saliente.

$$\begin{aligned} \frac{dF^\star}{d\omega}(\omega) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{tr}\Big(\rho(t)\star C_\omega^\dagger C_\omega\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{tr}\Big(\mathrm{S}^\star(\mathrm{t})\rho(0)\mathrm{S}^{\star\dagger}(\mathrm{t})\mathrm{C}_\omega^\dagger\mathrm{C}_\omega\Big), \end{aligned} \tag{18}$$

donde $S^\star(t) = 1 + S_1^\star(t) + S_2^\star(t) + \ldots$. debido a que $\rho(0)$ y C_ω son independientes de las coordenadas r y t y que $S^\star(t)$ depende solo de t, el producto Moyal no aparece en Eq. (18).

Calculando ahora $S^\star(t)$ a segundo orden en la constante de acople λ y pidiendo que $S^\star S^{\star\dagger} = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dF^\star}{d\omega}\bigg|_2(\omega) &= \frac{1}{\pi}\sum_\alpha p_\alpha\Big\langle\alpha\Big|S_1^{\star\dagger}\big[C_\omega^\dagger C_\omega, S_1^\star\big]\Big|\alpha\Big\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{\alpha\beta}p_\alpha(n_{\omega\beta} - n_{\omega\alpha})\Big|\Big\langle\beta\Big|S_1^\star\Big|\alpha\Big\rangle\Big|^2, \end{aligned} \tag{19}$$

donde $\{|\alpha\rangle\}, \{|\beta\rangle\}$ son conjuntos completos de estado para Φ. Aquí p_α son las funciones de probabilidad para los estados $|\alpha\rangle$ en la matriz de densidad $\rho(0)$. Además $n_{\omega\alpha}$ y $n_{\omega\beta}$

representan la cantidad de cuanta de energía ω en los estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$, respectivamente. La expresion: $|\langle\beta|S_1^\star|\alpha\rangle|^2$ representa la probabilidad de transición del sistema que inicia en el estado $|\alpha\rangle$ y que evoluciona al estado final $|\beta\rangle$ bajo la interacción no conmutativa y finalmente $n_{\omega\beta}-n_{\omega\alpha} \equiv \Delta n_\omega$ es la diferencia en el numero de partículas salientes de energía ω durante el proceso.

En la Eq. (19) hemos usado el hecho de que

$$S_1^\star + S_1^{\star\dagger} = 0, \tag{20}$$

$$S_1^\star S_1^{\star\dagger} + S_2^{\star\dagger} + S_2^\star = 0. \tag{21}$$

Aquí $S_1^\star$ depende solo de la coordenada t, lo que implica que el producto de Moyal se reduce al producto usual.

Las expresiones noconmutativas para las correcciones del hamiltoniano y la matriz S son un tanto largas y pueden cosultarse en [16]. Sin embargo a continuación daré el procedimiento seguido para encontrarlas.

3. Correcciones no conmutativas al flujo de radiación

Ahora procedemos a desarrollar las correcciones no conmutativas a $S_1^\star(t)$. Entonces tenemos que

$$S_1^\star(t) = -\frac{i}{4}\int^t \lambda\bigg(\Phi_1 \star \Phi_2 \star \Phi_3 \star \Phi_4 + \text{ perms}\bigg)\ dr'dt'; \tag{22}$$

aquí "perms" significa sumar sobre todas las permutaciones equivalentes. Podemos escribir el hamiltoniano $H_I^\star$ como

$$H_I^\star = H_I + H_I^{NC}[\Theta^2] + \mathcal{O}[\Theta^4], \tag{23}$$

donde $H_I^{NC}[\Theta^2]$ representa la corrección no conmutativa de orden más bajo distinta de cero. Si sustituimos esta expresión en $S_1^\star$ obtenemos que

$$S_1^\star = S_1 + S_1^{NC}[\Theta^2] + \mathcal{O}[\Theta^4], \tag{24}$$

con S_1 siendo la expresión (conmutativa) usual que se encuentra en la Ref. [10, 11]. Aquí $S_1^{NC}[\Theta^2]$ está dada por

$$S_1^{NC}[\Theta^2] = -i\int H_I^{NC}[\Theta^2]dt. \tag{25}$$

Para construir diagramas que tienen una correspondencia uno a uno con las diferentes contribuciones a la amplitud $\langle\beta|S_1^\star|\alpha\rangle$, vamos a utilizar algunas reglas útiles. A continuación daré algunos detalles sobre este método. El lector interesado puede consultar la referencia [10]. Todos los diagramas consisten de un vértice con cuatro líneas convergiendo, o bien dos líneas y un lazo. Las reglas son las siguientes:

1. Se escribe la interacción $\Phi_\star^4$ ordenada normalmente dentro de la amplitud $\langle\beta|S_1^\star|\alpha\rangle$.

2. Para cada término $C_\omega\psi_\omega$ dibújese una línea con una flecha apuntando (de izquierda a derecha) hacia el vértice. Esto representa una partícula saliente en el estado inicial.

3. Para cada término $C_\omega^\dagger\psi_\omega^*$ dibújese una línea con una flecha apuntando (de izquierda a derecha) hacia afuera del vértice. Esto representa una partícula saliente en el estado final.

4. Para cada término $b_\omega\chi_\omega$ dibújese una línea con una flecha apuntando (de derecha a izquierda) hacia el vértice. Esto representa una partícula entrante en el estado inicial.

5. Para cada término $b_\omega^\dagger\chi_\omega^*$ dibújese una línea apuntando (de derecha a izquierda) hacia afuera del vértice. Esto representa una partícula entrante en el estado final.

6. Para los términos $\chi_{\omega 1}^*\star\chi_{\omega 2}\delta_{\omega 1,\omega 2}$ o $\psi_{\omega_1}^*\star\psi_{\omega_2}\delta_{\omega_1,\omega_2}$ obtenidos en el ordenamiento normal de Φ, dibújese un lazo unido al vértice.

4. Conclusiones

Unruh y Leahy [10] fueron los primeros en darse cuenta de que si se introduce una interacción de la forma $\lambda\Phi^4$, se modifica la naturaleza térmica de la radiación emitida por el agujero negro. Su resultado, sin embargo, está "plagado" de divergencias, principalmente infrarojas.

En este artículo se generaliza los resultados para la expresiones que determinan el tipo de interacción de los campos escalares. En el presente trabajo se introdujo una modificación en el producto de operadores, promoviéndose dichos productos en productos "Moyal". De esta manera se modificó la expresión de la interacción del tipo $\lambda\Phi^4$ a una interacción noconmutativa $\lambda\Phi^{\star 4}$.

En el cálculo del flujo noconmutativo de partículas se hace necesario modificar los diagramas "de Feynman", los cuales pueden consultarse en [16]. Estos diagramas incluyen, de manera natural, a los encontrados por Leahy y Unruh [10]. Haciendo el cálculo explícito de la correccción a segundo orden al Hamiltoniano de interacción, se encuentra que al ser introducido en la matriz $S^\star$ obtendremos la modificación noconmutativa correspondiente. La noconmutatividad introduce, por una parte, un cambio en el comportamiento de las divergencias presentes en en flujo de radiación.

Adicionalmente, se encuentra que la noconmutatividad tiene el efecto de introducir un flujo distinto de cero en todo el espacio, particularmente en el horizonte de eventos. Esto es otro efecto puramente noconmutativo.

4. Agradecimientos

El autor desea agradecer el apoyo recibido por la Universidad autónoma del estado de Hidalgo (UAEH) para una parte del desarrollo de este trabajo.

Referencias

[1] S.W. Hawking, Nature **238** (1974) 30; "Particle Creation by Black Holes", Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.

[2] Ya. Zeldovich, L.P. Pitaevsky, Commun. Math. Phys. **23** (1971) 185; Ya. Zeldovich and A.A. Starobinsky, JETP **34** (1972) 1159; S.A. Teukolsky, Ap. J. **185** (1973) 635; W. Unruh, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 1265; Phys. Rev. D **10**(1974) 3194.

[3] G.W. Gibbons, "Quantum Field Theory in Curved Spacetime", in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey,* Eds. S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (1980).

[4] N.D. Birrell and P.C. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, London, 1982.

[5] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press (1994).

[6] J. Traschen, "An Introduction to Black Hole Evaporation", arXiv:gr-qc/0010053.

[7] T. Jacobson, "Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect", gr-qc/0308048.

[8] R. M. Wald, "The History and Present Status of Quantum Field Theory in Curved Spacetime," arXiv:gr-qc/0608018.

[9] G. Gibbons and M. Perry, Phys. Rev. Lett. **36**, (1976) 985.

[10] D.A. Leahy and W.G. Unruh, "Effects of a $\lambda\Phi^4$ interaction on black-hole evaporation in two dimensions", Phys. Rev. D **28**, (1983) 694.

[11] D.A. Leahy, Ph.D Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada. "University Microfilms International".

[12] W.G. Unruh, "Notes on Black Hole Evaporation", Phys. Rev. D **14** (1976) 870.

[13] N.D. Birrel and P.C. Davies, "Massless Thirring Model in Curved Space: Thermal States and conformal anomaly", Phys. Rev. D **18**, (1978) 4408.

[14] H. Snyder, Phys. Rev. D **71** (1947) 38.

[15] C.S. Chu, B.R. Greene and G. Shiu,"Remarks on Inflation and Noncommutative Geometry", Mod. Phys. Lett. A **16** (2001), 2231.

[16] H. García-Compeán and C. Soto-Campos, "Noncommutative Effects in the Black Hole Evaporation": Physical Review D**74**, (2006), 104020.