Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad

Juan Alberto Acosta Hernández; Carlos Rondero Guerrero; Anna Tarasenko
acostah@uaeh.reduaeh.mx rondero@uaeh.reduaeh.mx anataras@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN
México

Resumen

Se presenta un estudio histórico y epistemológico acerca de la noción de linealidad, donde se muestran aspectos relevantes sobre su génesis y desarrollo, haciendo un rescate de la misma, hasta mostrar su aparición en el Álgebra Lineal.
Se han identificado cuatro escenarios históricos, el primero se remonta a las culturas ancestrales egipcia, china y babilónica, donde el cobro de impuestos se calculaba por medio de la proporción directa y la progresión aritmética. En el segundo, se toma como referencia principal a autores clásicos de la cultura griega, quienes emplearon a la noción de proporcionalidad como elemento epistemológico de construcción de muchos de sus resultados.
El tercer escenario, se caracteriza por ser una época en donde se presenta un enlace conceptual entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, donde Fermat y Descartes, dieron pleno sentido a los trabajos de Apolonio sobre lugares geométricos.
El último escenario, parte del origen del Álgebra Lineal, cuyo sustento epistemológico está dado por la noción de linealidad, la cual genera conceptos tales como: dependencia e independencia lineal, rango, entre otros. Se plantea que es a través de la articulación de saberes como se pueden explicitar las relaciones conceptuales de la linealidad, para su incorporación en la Didáctica de la Matemática. En este trabajo se considera a la linealidad como una noción que ha evolucionado en la historia, a partir de necesidades socioculturales de las épocas referidas.

Palabras clave: Linealidad, Epistemología, Historia de la matemática, Didáctica de la matemática

Introducción

En este trabajo se reporta un estudio acerca de la noción de linealidad, desde una perspectiva histórica y epistemológica. Se muestran evidencias acerca de que la noción de proporcionalidad es el sustento epistemológico de la noción de linealidad, como se registra en culturas ancestrales egipcia, china y babilónica. La noción de proporcionalidad se manifiesta, entre otros aspectos, a través del cobro de impuestos, empleando la expresión del interés simple.
Se han identificado cuatro escenarios históricos en cuanto a la evolución de la noción de linealidad. El primero es el ya referido a las culturas ancestrales, el segundo se ubica en la Grecia clásica. El siglo XVII es el periodo donde se inicia la distinción conceptual entre la proporcionalidad directa y la línea recta, lo que se entrevé de los trabajos de Fermat y Descartes. El último escenario, se ubica a mediados del siglo XIX con la aparición de conceptos que inician la fundamentación del Álgebra lineal.
Ahora bien, en la Didáctica de las Matemáticas, la linealidad aparece en los saberes escolarizados, desde la proporcionalidad directa, hasta el Álgebra Lineal.

Se parte de la consideración de que es a partir de necesidades sociales como se ha dado la construcción de conocimiento matemático, por lo que se enfatizan algunos elementos socioculturales de la noción de linealidad, que han permitido construir distintos conceptos matemáticos desprendidos de la misma.

Perspectiva histórica-epistemológica

La matemática anterior a la griega, en particular la babilónica y la egipcia, habrían de alcanzar un alto grado de desarrollo de la habilidad operatoria, para abordar todo tipo de problemas de la vida cotidiana, desde la repartición de una herencia, hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica funcionaba para hacer cálculos astronómicos y mercantiles, o lo relacionado con áreas y volúmenes, donde esta último está inmiscuida la proporción directa (Filloy, 1998).

En la cultura egipcia, no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dan elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde *a, b* y *c* son conocidas y *x* desconocida. Se puede resaltar como lo señala Boyer (1991) refiriéndose al trabajo del escriba Ahmes, que aparece en el *Papiro de Rhind*, en donde se muestra la solución de este tipo de ecuaciones, empleando un método que en nuestros días se conoce como el *método de la falsa posición*.

Hay un libro clásico en la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* (Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático) de la dinastía Han (206 AC – 220 DC) Struik (1986), en el cual aparecen porcentajes y proporciones en el Capítulo II: *Mijo y arroz*. Por su parte, en el Capítulo III: *Distribución por progresiones*, se presentan problemas de aplicación de impuestos a productos de cualidades diferentes; así como aplicaciones de "la regla de tres" y de progresiones aritméticas y geométricas. El Capitulo VI: *Aplicación imparcial de impuestos*, trata del cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población. En el Capítulo VII: *Excesos y deficiencias* se ocupa fundamentalmente de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos (García, 2000).

La noción de proporcionalidad aparece en ambas culturas, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos en el cálculo de áreas y volúmenes. Por su parte, la noción de linealidad, surge incipientemente desde que se trabajan las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, usadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

En referencia al segundo escenario, la noción de linealidad aparece explícita o implícitamente, cuando Euclides hace mención de la recta en todos sus postulados. En su conocido libro, *Los Elementos*, escrito hacia el año 300 AC, presenta los conocimientos de la Grecia clásica, deduciéndolos a partir de cinco postulados, siendo los referidos a la recta de manera directa:

1. Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.

2. Toda recta se puede prolongar indefinidamente.

5. Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

Euclides emplea el primero de ellos, no sólo en el sentido de que por dos puntos pasa una recta, sino además de que ésta es única. Por otra parte, emplea la proporcionalidad directa al relacionar el área de un círculo con el cuadrado de su diámetro, para inferir el área comprendida dentro de la circunferencia (Hofmann, 2002).

En lo que se refiere a razones y proporciones, hacia el año 370 AC Eudoxio de Cnido (408? – 355?) ahonda en las ideas de Anaxágoras, tomando a la geometría antigua como un caso particular, en el sentido dos magnitudes no pueden formar una razón si la menor de ellas no puede hacerse más grande que la mayor mediante su multiplicación por números enteros, definiendo indirectamente la igualdad de dos razones $a: b$ y $c: d$, exigiendo que al elegir dos números dados cualesquiera m y n *resulte siendo* $m\,a$ menor o mayor o igual a nb, sea $m\,c$ menor o mayor o igual a $n\,d$. De igual manera, Eudoxio demuestra que la proporcionalidad del volumen de la esfera al cubo de la arista, es igual al diámetro de aquella y corrobora la exactitud de la determinación del volumen de la pirámide y del cono, trabajadas anteriormente por Demócrito (Hofmann, 2002).

En el siglo III AC, hay referencia a la proporcionalidad en una carta que dirige Arquímedes a Eratóstenes, donde resalta que ha recogido algunos resultados matemáticos a través de medios mecánicos, para después demostrarlos geométricamente. Siendo la base de sus demostraciones, la teoría de las razones y proporciones de Euclides. Arquímedes, añade expresamente el siguiente postulado: *De dos magnitudes desiguales, la mayor excede a la menor en una cantidad tal que, añadida sucesivamente a sí misma, puede exceder a cualquier magnitud determinada del mismo tipo que las comparadas* (Torija, 1999).

En el primer postulado del primer libro, *Sobre la esfera y el cilindro,* Arquímedes, da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Por otra parte, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, 1999). Esto es, el volumen de la esfera es directamente proporcional al diámetro elevado al cubo[1]. En cuanto a la proporcionalidad directa entre las dos cantidades, el volumen y el cubo del diámetro, existe una dependencia lineal, en el sentido de que si aumenta el cubo del diámetro, también hay un incremento del volumen, y el aumento es constante, por ser magnitudes del mismo tipo, en este caso ambas de dimensión tres: *el volumen de la esfera es proporcional al cubo del diámetro,* en forma simbólica, $V = k\,d^3$.

Otro autor clásico fue Apolonio (siglo III AC), quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola a los lugares geométricos que hoy conocemos. De algunos escritos de Apolonio se han conservado únicamente las secciones proporcionales (en traducción árabe). Nos es conocido únicamente por referencias de Pappus (aprox. 320 d. de C.). *La Sección proporcional, la Sección espacial y la Sección determinada*, se refieren esencialmente a las propiedades de series de puntos proyectivos. *Las Intercalaciones*, se refieren a los problemas de este tipo que se pueden lograr con regla y compás, tratándose de *curvas directrices* que se pueden construir con líneas rectas. En el escrito *Lugares geométricos planos*, se tratan lugares geométricos rectilíneos y circulares. (Hofmann, 2002)

---

[1] El volumen tiene una dependencia lineal con el diámetro al cubo y una dependencia no lineal con el diámetro

A partir del análisis de la evolución de las nociones referidas, en este segundo escenario la noción de linealidad, empieza a tener una estructura más formal, a través de los postulados y demostraciones de teoremas geométricos, mostrando su desprendimiento en forma incipiente de la noción de proporcionalidad. Además, se puede resaltar que en el primer escenario, la proporcionalidad tiene un sentido práctico que se manifiesta en la solución de problemas contextuales y cotidianos, mientras que en la Grecia clásica, se presenta un enfoque de la proporcionalidad y de la idea naciente de linealidad, con características dirigidas a aspectos científicos relevantes de aquel momento histórico.

En la tercera etapa, principalmente referida al siglo XVII, llamado *Periodo Culminante del Barroco*, hay un florecimiento de la matemática, en el sentido de la unificación de conocimientos nuevos a partir de trabajos antiguos. Fermat y Descartes toman lo obtenido por Apolonio de Pérgamo (262 ? - 190? AC), desde su escrito *La Cónica* y establecen la unificación geométrica - algebraica de la recta, proponiendo su ecuación:

En su empeño de dar pleno sentido a los trabajos antiguos sobre lugares geométricos, se le ocurrió a Fermat, como a Descartes, de cuyas obras no conocía nada entonces, determinar la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x. Ya da a la recta que pasa por el origen, la forma ***b x = a y*** *y considera a x + b y = c como la ecuación de una recta en su forma general y la amplía al problema del lugar geométrico de Apolonio, reconociendo que* $\sum a_i x + b_i y + c_i = d$ *es la ecuación de una recta* (Hofmann, 2002).

En el mismo sentido, Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, siendo su meta un método de investigación que permita ir de lo complejo a lo sencillo, y de las hipótesis a la evidencia y a la claridad. Persigue la unión empezada, pero no terminada por Viète, del Álgebra con la Geometría. Descartes agrega a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás, considerándolos como problemas del plano (denominación de Apolonio).
A diferencia de los dos primeros escenarios, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales *(x,y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico.
El cuarto escenario, ubicado a partir del siglo XVIII, es donde se da el inicio incipiente del Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de n ecuaciones con m incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad.
Como se señaló con anterioridad, ya se conocían métodos de solución en las culturas ancestrales china, egipcia y babilónica. Sin embargo, uno de los primeros ejemplos significativos de su tratamiento analítico, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo

llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. Aunque esto no era tan significativo para los matemáticos de la época, pues no ofrecía nuevos métodos de solución, lo novedoso fue la aproximación descriptiva y cualitativa de su estudio.
Las pruebas de Euler se basan en técnicas de eliminación y sustitución. El criterio de dependencia es el hecho de que las incógnitas permanecen indeterminadas. Proporciona una conclusión para cualquier n:

"Cuando se sostiene que para determinar n cantidades desconocidas basta con tener n ecuaciones que expresan su información propia, hay que añadir allí la restricción de que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que no haya ninguna que esté contenida en otras." (Euler (1750), traducción libre de Dorier, 2000)

En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes, pero de manera cauta, Dorier (2000) afirma que Euler refiere como un *accidente* el hecho de que las cantidades desconocidas permanecen indeterminadas, aunque que provienen de las relaciones lineales de las ecuaciones, por lo que la tarea inicial en esa época es resolver el sistema de ecuaciones. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Euler, citado por Dorier (2000) le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX. Esta explicación del caso excepcional de dependencia inclusiva en sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, fue un cambio en el punto de vista en la aproximación de ecuaciones lineales.
Finalmente, se puede decir que Euler no propuso ninguna aproximación teórica de la dependencia lineal, pero sí enfatizó ciertos hechos intuitivos que tendrían implicaciones importantes en esa dirección.
En siglo XVIII, Cramer publicó un tratado titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques.* Este documento es el primero donde aparece una notación para la escritura de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes no específicos. Aunque en 1693, Leibniz había escrito una carta con contenidos semejantes, la cual se publicó por primera vez en 1850. En el libro de Cramer se presenta una regla para obtener la solución de sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, como función de sus coeficientes, empleando lo que ahora se conoce como determinantes. A partir de este trabajo los determinantes han sido ampliamente utilizados y constituyen un tópico importante de las matemáticas, de modo tal que la teoría de los determinantes ha constituido un marco indispensable para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Cabe señalar que la aproximación intuitiva de Euler, no permaneció con tanta influencia como los determinantes en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (citado en Dorier, 2000).
El concepto de rango, empezó a tomar forma dentro de la Teoría de determinantes entre 1840 y 1879, siendo algunas de las dificultades en su conceptualización a las que se enfrentaron los matemáticos las siguientes:

> *"1. el reconocimiento de su carácter invariante que era, si no invisible, al menos asumido sin la necesidad de la prueba.*
> *2. la posibilidad de la misma definición de dependencia entre ecuaciones y n-uplas.*

3. la anticipación del concepto de dualidad y la consideración de todos los sistemas de ecuaciones que tienen el mismo juego de soluciones." (Traducción libre de Dorier, 2000)

En referencia a Frobenius, se puede decir que es de los primeros autores en definir en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y n–uplas, vinculándolo con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada. Al considerar a las ecuaciones y a las n-uplas como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad. Frobenius da un gran aporte hacia el concepto moderno de vector. Define el concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* a un sistema dado, esto es, que un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los componentes de los elementos de cualquier base de soluciones del sistema inicial.

Propuso una forma diferente de los procesos que devienen desde la época de Cramer. Ya no hubo una separación arbitraria entre incógnitas principales y secundarias, y ecuaciones, pero sobretodo el concepto de dependencia lineal reemplazó el término de dependencia inclusiva, acuñado por Euler. Fue hasta 1879 que Frobenius llamó al rango como el orden máximo del menor no nulo, (Dorier, 2000).

Este breve estudio histórico-epistemológico, acerca de las nociones de proporcionalidad y de linealidad, muestra su evolución conceptual a partir de las condiciones socioculturales de cada momento. De donde se rescatan elementos epistemológicos que en principio es posible incorporar a la didáctica de la matemática.

La noción de linealidad en la didáctica

Cabe señalar que la forma en como se instala la noción de linealidad, desde la matemática elemental, no permite una adecuada articulación con conceptos que se tratan en la matemática avanzada, como es el caso del Álgebra Lineal, convirtiéndose este hecho en un obstáculo epistemológico para su aprendizaje. En tal caso, la didáctica referida a la noción de linealidad, debe atender el hacer explícita la articulación conceptual entre función lineal, operador lineal, transformación lineal, dependencia e independencia lineal y espacios vectoriales, entre otros. Es precisamente aquí donde el estudio epistemológico juega un papel relevante para la didáctica, pues de lo contrario el saber relacionado con la proporcionalidad y la linealidad, se presenta deshilvanado y con poco significado conceptual.

Se tienen evidencias, a través de entrevistas con estudiantes de licenciatura, de que existe una fuerte desarticulación entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad. En el contexto de un problema de semejanza de triángulos, no pudieron identificar la igualdad entre las razones de los lados, sino que dieron argumentos trigonométricos a través de la tangente del ángulo común, en forma tal que aún apareciendo explícitamente la proporcionalidad, les fue difícil articularla con la linealidad. Esto es una muestra del hecho relevante de que el currículo tradicional no propicia este tipo de articulación conceptual entre las nociones mencionadas.

Conclusiones

Es de resaltar la fuerte filiación epistemológica existente entre las nociones de proporcionalidad y de linealidad, de la cual se han dado evidencias. La noción de linealidad transita desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada.

El sustento epistemológico del Álgebra Lineal es precisamente la noción de linealidad, de forma tal que resulta imprescindible incorporar algunos de tales aspectos a su aprendizaje. Resulta pertinente una presentación conceptualmente articulada de la noción de la linealidad para propiciar su adecuado aprendizaje.

Partiendo de una perspectiva epistemológica se muestran algunas evidencias de cómo desde la antigüedad, en culturas como la china, babilónica, egipcia y griega aparece las nociones de proporcionalidad y linealidad. La base de dichas aportaciones son las razones y proporciones, las cuales, desde nuestra percepción son sustento epistemológico de la proporcionalidad, forman parte del antecedente de la misma noción de linealidad. Arquímedes, da la definición de recta más empleada hasta nuestros días. Euclides probó que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros. Arquímedes retoma esta consideración para la relación entre el volumen del cilindro y el de la esfera insertada.

En los libros de texto se percibe a la noción de linealidad, desde que se aborda la proporción directa, inmersa en la regla de tres y en la semejanza de triángulos, pasando por la función lineal $y = mx$ con $x \in R$, hasta el concepto de linealidad que es uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal.

El problema del aprendizaje de la noción de linealidad en ambiente escolar, es un fenómeno complejo donde intervienen las dimensiones, epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. En este trabajo se han dado algunas evidencias, principalmente en lo epistemológico.

Se ha mostrado en este análisis histórico-epistemológico cómo es que la noción de linealidad, podría ser un elemento de articulación en la Didáctica de la Matemática.

En la perspectiva de este trabajo se considera a la linealidad como una noción que ha evolucionado en la historia, primero a partir de necesidades socioculturales de la época referida, hasta constituir desde el siglo XIX, un cuerpo de conocimientos estructurados en teorías formales.

Se pretende a partir de esos saberes inmiscuidos con la noción de linealidad, aportar elementos que den cuenta de las rupturas y filiaciones epistemológicas, así como de sus implicaciones en la didáctica.

Bibliografía

Acosta, J. (2008) Análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad. Tesis doctoral (en proceso). México: CICATA-IPN.

Boyer, C. (1991) *A History of Mathematics*. United States: Wiley.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004b) La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématique.* La Pensée Sauvage, France. Vol. 24, Num. 2.3, pp. 137 – 168.

Dorier, J. (2000) *On the teaching of linear algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. (1998) *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, R. (2000) *El conocimiento en construcción.* España: Gedisa Editorial.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México, D.F., México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002) *Historia de la matemática.* México: Limusa.
Rondero, C. (2001) Epistemología y cognición de las ideas germinales *Ponderatio* y *Aequilbrium* en la constitución del saber físico matemático. México: CINVESTAV-IPN.
Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* (2ª ed.). [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México, D.F., México: Instituto Politécnico Nacional.
Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.